САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КУДРЯШОВА Елена Владимировна

ЦИКЛЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

05.13.18 - Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009

Работа выполнена на кафедре прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научные руководители:	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор ЛЕОНОВ Геннадий Алексеевич кандидат физико-математических наук, доцент КУЗНЕЦОВ Николай Владимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ДЕМЬЯНОВИЧ Юрий Казимирович (Санкт-Петербургский государственный университет) доктор технических наук, ведущий научный сотрудник АНДРИЕВСКИЙ Борис Ростиславич (Учреждение Российской академии наук Институт проблем машиноведения РАН)
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

Защита состоится “___”_________2009 г. в __ часов на заседании совета Д 212.232.51 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан “____” ___________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор Даугавет И. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Данная работа посвящена исследованию периодических решений в двумерных квадратичных системах, в уравнении Льенара и неунимодальных одномерных дискретных отображениях с применением современных вычислительных возможностей и пакетов символьных вычислений.

Актуальность темы. Исследование циклов двумерных динамических систем стимулировалось, как чисто математическими проблемами, такими как шестнадцатая проблема Гильберта, проблема центра - фокуса, так и многими прикладными задачами. Так, к исследованию двумерных квадратичных систем приводит рассмотрение различных популяционных моделей в биологии, а уравнение Льенара описывает динамику различных механических и электронных систем. В таких моделях важную роль играют предельные циклы.

Задача локализации и моделирования предельных циклов, даже для простых двумерных квадратичных систем, является нетривиальной и была сформулирована академиком А.Н. Колмогоровым. В.И. Арнольд в книге "Экспериментальная математика" пишет: "Чтобы оценить число предельных циклов квадратичных векторных полей на плоскости, А.Н. Колмогоров раздал несколько сотен таких полей (со случайно выбранными коэффициентами многочленов второй степени) нескольким сотням студентов механико-математического факультета МГУ в качестве математического практикума. Каждый студент должен был найти число предельных циклов своего поля. Результат этого эксперимента был совершенно неожиданным: ни у одного поля не оказалось ни одного предельного цикла!". Из чего В.И. Арнольдом был сделан вывод о том, что область в пространстве параметров, соответствующая существованию предельных циклов в двумерных квадратичных системах, мала.

Задача исследования предельных циклов двумерных квадратичных систем разделяется на исследование "малых" предельных циклов (локальная шестнадцатая проблема Гильберта) и изучение "больших" предельных циклов, то есть циклов, которые могут быть получены при помощи численных процедур.

Важный вклад в исследование “малых” предельных циклов в рамках локальной шестнадцатой проблемы Гильберта внесли Н.Н. Баутин, P. Yu, J. Li, S. Lynch, J. Chavarriga, M. Grau, J. Gine, L.M. Perko, Л.А. Черкас. Одним из наиболее эффективных методов исследования “малых” предельных циклов является метод ляпуновских величин (или констант Пуакаре-Ляпунова), характеризующих устойчивость и неустойчивость в малой окрестности слабого фокуса, предложенный в классических работах H. Poincaré и А.М. Ляпунова. Если первая и вторая ляпуновские величины были вычислены в общем виде для двумерных систем в сороковые-пятидесятые годы прошлого столетия Н.Н. Баутиным и Н.Н. Серебряковой, то третья ляпуновская величина вычислялась лишь в некоторых специальных случаях в работах P. Yu, S. Lynch, N.G. Lloyd. Вычисление третьей ляпуновской величины в общем виде стало возможно с появлением современных мощных технических средств и специальных математических пакетов символьных вычислений.

Символьные выражения ляпуновских величин и метод малого возмущения параметров системы позволяют, следуя работе Н.Н. Баутина, получить по одному “малому” предельному циклу вокруг двух состояний равновесия или три “малых” предельных цикла вокруг одного состояния равновесия двумерной квадратичной системы.

Некоторые аналитические и численные методы исследования “больших” предельных циклов были предложены в работах S.L. Shi, T.R. Blows, L.M. Perko, N.G. Lloyd, C. Christopher, Л.А. Черкаса, Г.А. Леонова.

К рассмотренному в диссертации одномерному дискретному отображению приводит изучение работы цифровых систем фазовой автоподстройки частоты (ФАП), где возникает задача определения последовательности бифуркационных параметров системы. Качественный анализ уравнений ФАП и вычисление бифуркационных параметров позволяют определить необходимые условия работы системы (при которых, например, имеются синхронизация частот и коррекция расфазировок). Важный вклад в исследование дискретных динамических систем, описывающих работу цифровых ФАП, внесли H.C. Osborn, W. Lindsey, N.D. Dalt, В.Н. Белых, Г.А. Леонов и С.М. Селеджи, T. Majumdar, T. Banerjee и B.C. Sarkar, Saleh

R. Al-Araji, M. Zoltowski.

Рассмотренное в работе отображение не является унимодальным, что не позволяет применить напрямую известные методы теории ренорм-групп для его исследования.

Одна из первых работ, посвященных исследованию рассмотренной в работе системы, принадлежит H.C. Osborne. В ее работе был рассмотрен алгоритм исследования периодических решений и было показано, что даже в простых дискретных моделях ФАП бифуркации влекут появление новых устойчивых периодических решений и изменение их периода. Позднее, в работах В.Н. Белых и В.П. Максакова, для таких систем была описана модель перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. В работах Г.А. Леонова и С.М. Селеджи, применение этих идей позволило получить бифуркационное дерево перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

Цель работы. Целью работы является исследование периодических решений некоторых классов непрерывных и дискретных динамических систем с помощью качественной теории динамических систем, современных технических средств и специализированных математических пакетов.

Методы исследования. При исследовании предельных циклов систем дифференциальных уравнений в работе используются реализации в пакете Matlab метода вычисления ляпуновских величин во временной области и евклидовой системе координат (разработанного в [2]), обобщенного классического метода Ляпунова вычисления ляпуновских величин, метода сведения квадратичной системы к системе Льенара и метода асимптотического интегрирования уравнения Льенара.

При исследовании периодических решений дискретной динамической системы, описывающей работу цифровой ФАП, используется реализация в пакете Matlab метода вычисления мультипликаторов.

Результаты, выносимые на защиту.

- Разработаны и реализованы символьные алгоритмы вычисления ляпуновских величин в общем виде, основанные на методе вычисления ляпуновских величин во временной области и евклидовой системе кординат и обобщенном классическом методе Ляпунова.

- Впервые получено полное выражение третьей ляпуновской величины в общем виде.

- Впервые получено полное выражение четвертой ляпуновской величины для системы Льенара в общем виде.

- Разработан и реализован в Matlab символьный алгоритм преобразований между квадратичной системой и системой Льенара, на основе работ Л.А. Черкаса и Г.А. Леонова.

- Разработан и реализован символьный алгоритм преобразования двумерной квадратичной системы, рассмотренной в работах S.L. Shi, к системе Льенара. С помощью разработанного алгоритма разработана и реализована процедура визуализации области параметров, полученной S.L. Shi для двумерных квадратичных систем с четырьмя предельными циклами, на плоскости двух параметров системы Льенара.

- Выявлен и изучен эффект "траекторного уплощения", исследован сценарий разрушения предельного цикла на основе проведенных компьютерных экспериментов по моделированию "больших" предельных циклов двумерных квадратичных систем и соответствующих им систем Льенара в рамках изучения задачи Колмогорова о вычислении предельных циклов двумерных квадратичных систем.

- Построено уточненное бифуркационное дерево и численно получены четырнадцать бифуркационных значений параметра дискретной динамической системы, описывающей работу цифровой системы автоподстройки частоты. Уточнен эффект сходимости бифуркационных значений для неунимодального отображения, аналогичный эффекту Фейгенбаума для унимодальных отображений.

Достоверность результатов. Символьные выражения для третьей ляпуновкой величины в общем виде и четвертой ляпуновской величины для системы Льеара получены двумя независимыми реализациями двух разных методов. Применение разработанных алгоритмов для систем более малого порядка дает выражения, совпадающие с известными результатами, полученными в работах S. Lynch и Н.Н. Баутина.

Существование полученных в работе "больших" предельных циклов подтверждается теоретическими результатами S.L. Shi и Г.А. Леонова.

Правильность алгоритма вычисления бифуркационных значений параметра дискретной динамической системы подтверждается совпадением первых значений с ранее известными значениями, полученными в работах H.C. Osborne, Г.А. Леонова и С.М. Селеджи.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты могут быть применены при разработке методов исследования циклов динамических систем, при компьютерном моделировании фазовых портретов систем дифференциальных уравнений, при разработке систем фазовой синхронизации и вычислении бифуркационных параметров дискретных динамических систем.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались на международных конференциях "Dynamical system modeling and stability investigation" (Киев – 2005), "Nonlinear Dynamical Analysis - 2007" (Санкт-Петербург – 2007), "Space, astronomy and programming" (Санкт-Петербург – 2008), "Workshop on Numerics in Dynamical Systems" (Хельсинки – 2009), "PHYSCON" (Катания – 2009) и включены в пленарный доклад на X международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления", имени Е.С. Пятницкого (Москва – 2008).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 печатных работах, в том числе в 3 статьях.

Статья [1] опубликована в издании, рекомендованном ВАК РФ для специальности 05.13.18. Статья [2] опубликована в издании, рекомендованном ВАК РФ для специальности 01.01.02.

В работах [2 – 8] соавторам принадлежит постановка задачи. В работах [2, 5] диссертантке принадлежат реализация символьных алгоритмов и компьютерное моделирование. В работах [3, 4, 7] диссертантке принадлежат разработка алгоритмов и численные результаты. В работе [6, 8] диссертантке принадлежат разработка алгоритмов и численные результаты для дискретных динамических систем.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, восьми приложений, списка литературы, включающего 131 наименование, и изложена на 156 страницах машинописного текста, содержит 34 рисунка и 1 таблицу.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается история исследования периодических решений двумерных непрерывных и одномерных дискретных динамических систем и представлен обзор литературы, посвященной изучению "больших" и "малых" циклов непрерывных систем в рамках задачи Колмогорова и бифуркационной динамики одномерных дискретных отображений, описывающих работу цифровых систем фазовой автоподстройки частоты. Также во введении обосновываются актуальность и научная новизна диссертации. Формулируются практическая и теоретическая ценность результатов работы.

Первая глава посвящена задаче Колмогорова о локализации и моделировании "больших" предельных циклов (циклов, которые могут быть увидены при помощи численных процедур) двумерных квадратичных систем общего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + \alpha_1x + \beta_1y, \\ \dot{y} &= a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + \alpha_2x + \beta_2y, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i$ – вещественные числа ($i = 1, 2$).

Компьютерное моделирование и численные эксперименты проводились с помощью пакета Matlab. Для моделируемых систем определены начальные данные траекторий, локализующих цикл, и реализована настройка параметров интегрирования, позволяющих провести локализацию цикла.

Во второй главе исследуются "малые" предельные циклы (так называемая локальная шестнадцатая проблема Гильберта). Для этого используется метод ляпуновских величин (или констант Пуакаре-Ляпунова), характеризующих устойчивость и неустойчивость в малой окрестности слабого фокуса, предложенный в классических работах H. Poincaré и А.М. Ляпунова.

На основе метода вычисления ляпуновских величин во временной области и в евклидовой системе координат, разработанного в [2], разработан и реализован в пакете Matlab алгоритм символьного вычисления ляпуновских величин в общем виде. С помощью разработанного алгоритма впервые получено и представлено в Приложении 2 полное выражение третьей ляпуновской величины в общем виде.

Для проверки полученного выражения, разработан, реализован и представлен в Приложении 3 алгоритм символьного вычисления ляпуновских величин на основе, представленного в работе, обобщенного классического метода Ляпунова.

Вычисление символьного выражения третьей ляпуновской величины в общем случае по указанным алгоритмам требует обработки символьных выражений, содержащих более двух миллионов символов. Разработанные алгоритмы позволили преодолеть внутренние ограничения пакета Matlab и ограничения памяти компьютера. Полученное выражение третьей ляпуновской величины занимает более 12 страниц машинописного текста.

Вычисление ляпуновских величин двумя различными аналитическими методами с привлечением современных программных средств символьных вычислений позволило убедиться в правильности полученного выражения.

Разработан символьный алгоритм вычисления ляпуновских величин для системы Льенара

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y\\ \dot{y} &= x + g_{x1}(x)y + g_{x0}(x),\end{aligned}$$

где $g_{x1}(x) = g_{11}x + g_{21}x^2 + \ldots$ и $g_{x0}(x) = g_{20}x^2 + g_{30}x^3 + \ldots$.

Этот алгоритм позволил впервые получить символьное выражение четвертой ляпуновской величины в общем виде

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_4 = \ & \frac{\pi}{17280}(945g_{81} + 4158g_{20}^2g_{40}g_{31} + 2835g_{20}g_{30}g_{51} - 5670g_{20}g_{30}g_{11}g_{50}\\ & -4158g_{20}^2g_{30}g_{11}g_{40} + 2835g_{20}g_{11}g_{70} + 1215g_{30}g_{11}g_{60} + 1701g_{40}g_{11}g_{50}\\ & -4620g_{20}^3g_{11}g_{50} - 8820g_{20}^3g_{30}g_{31} + 1701g_{30}g_{40}g31 + 2835g_{20}g_{50}g_{31}\\ & -2835g_{20}g_{30}^2g_{31} - 1701g_{30}^2g_{11}g_{40} + 8820g_{20}^3g_{30}^2g_{11} + 3080g_{20}^5g_{11}g_{30}\\ & +2835g_{20}g_{30}^3g_{11} + 4620g_{20}^3g_{51} - 1701g_{40}g_{51} - 945g_{11}g_{80}\\ & -3080g_{20}^5g_{31} - 1215g_{60}g_{31} - 2835g_{20}g_{71}).\end{aligned}$$

Программный код, с помощью которого можно получить это выражение, представлен в Приложении 4.

Полученные символьные выражения ляпуновских величин позволили применить метод Н.Н. Баутина для исследования "малых" предельных циклов.

Соединение методов локализации "больших" предельных циклов и метода исследования "малых" предельных циклов позволило провести исследование классов двумерных квадратичных систем с четырьмя предельными циклами.

Третья глава посвящена исследованию класса систем с четырьмя предельными циклами в рамках задачи Колмогорова.

Для исследования предельных циклов оказалось полезным приведение двумерных квадратичных систем к системе Льенара специального вида. Следуя работам Л.А. Черкаса и Г.А. Леонова, разработан и реализован в Matlab, представленный в Приложении 3, символьный алгоритм преобразований между системой (1) и системой Льенара

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y,\\ \dot{y} &= -F(x)y + G(x),\end{aligned} \tag{2}$$

с функциями

$$F(x) = (Ax + B)x|x + 1|^{q-2},$$
$$G(x) = (C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + 1)x\frac{|x + 1|^{2q}}{(x + 1)^3},$$

где A, B, q, C_1, C_2, C_3 – параметры, зависящие от коэффициентов соответствующей квадратичной системы.

Программный код, с помощью которого можно получить символьные выражения коэффициентов системы Льенара (2) через коэффициенты двумерной квадратичной системы (1) и обратно, представлен в Приложении 5.

С помощью этого алгоритма преобразования между квадратичной системой и системой Льенара получены условия на коэффициенты систем, при которых, в случае зануления первых двух ляпуновских величин, коэффициенты системы Льенара A, C_1, C_2, C_3 и третья ляпуновская величина L_3 выражаются через параметры B и q системы Льенара.

Такое представление позволило получить визуализацию областей параметров двумерных квадратичных систем и соответствующих систем Льенара с четырьмя предельными циклами на плоскости двух параметров B и q.

Согласно аналитическим результатам Г.А. Леонова, полученным с помощью метода асимптотического интегрирования, построена область параметров двумерной квадратичной системы с четырьмя предельными циклами (область L на Рис. 1). Для полученной области были проведены численная локализация и исследование поведения "больших" предельных циклов.

Проведено сравнение области параметров, полученной Г.А. Леоновым, с известными результатами S.L. Shi. Разработан и реализован, представленный в Приложении 8, символьный алгоритм преобразования двумерной квадратичной системы, рассмотренной в работах S.L. Shi, к системе Льенара. С помощью этого алгоритма разработана и реализована процедура визуализации области параметров, полученной S.L. Shi для двумерных квадратичных систем с четырьмя предельными циклами, на плоскости параметров B и q системы Льенара (область S на Рис. 1).

Визуализация результатов S.L. Shi, полученная в настоящей работе,

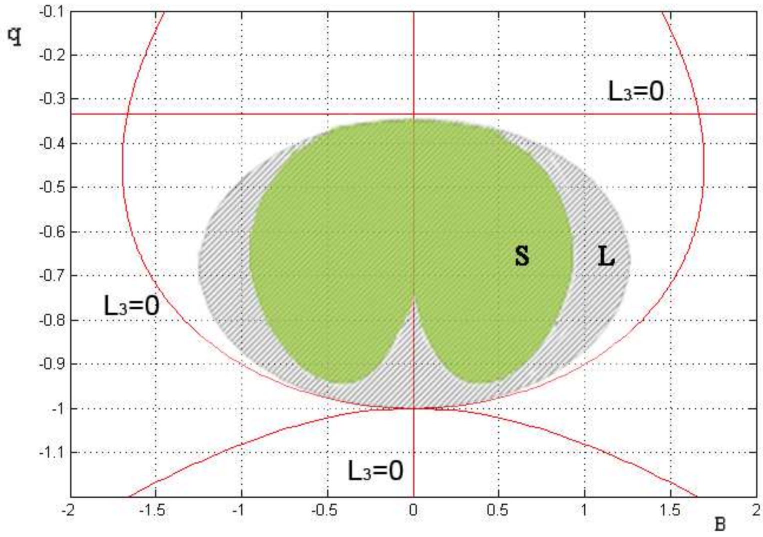

Рис. 1. Визуализация результатов S.L. Shi.

показывает (Рис. 1), что область параметров S, соответствующая рассмотренному S.L. Shi классу двумерных квадратичных систем, полностью лежит в области параметров L, полученной с помощью метода асимптотического интегрирования Г.А. Леонова.

В рамках задачи Колмогорова о локализации и моделировании предельных циклов двумерных квадратичных систем, для квадратичных систем и соответствующих систем Льенара с параметрами из области, соответствующей существованию четырех предельных циклов (область L на Рис. 1), проведены компьютерные эксперименты построения “больших” предельных циклов.

В ходе экспериментов выявлен эффект “траекторного уплощения”, когда сильные уплощения затрудняют численную локализацию предельного цикла (Рис. 2).

Также в процессе компьютерных экспериментов исследованы сценарии “разрушения” циклов (Рис. 3) при подходе к границам области коэффициентов, соответствующей существованию четырех предельных циклов (область L на Рис. 1).

Для подтверждения достоверности численной локализации предельных циклов, моделирование проводилось для двух эквивалентных объектов – квадратичной системы и соответствующей системы Льенара.

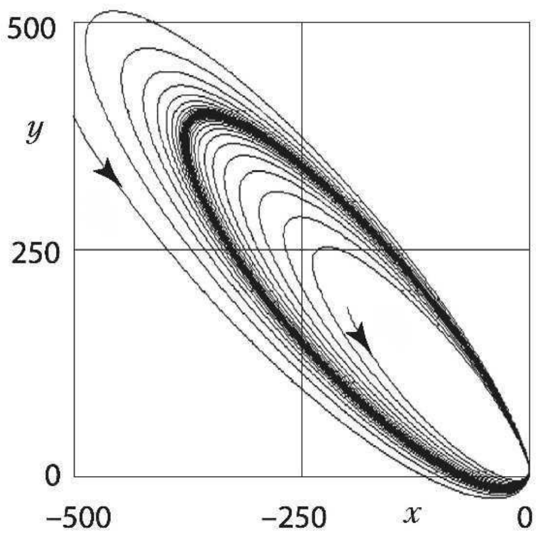

Рис. 2. Предельный цикл квадратичной системы.

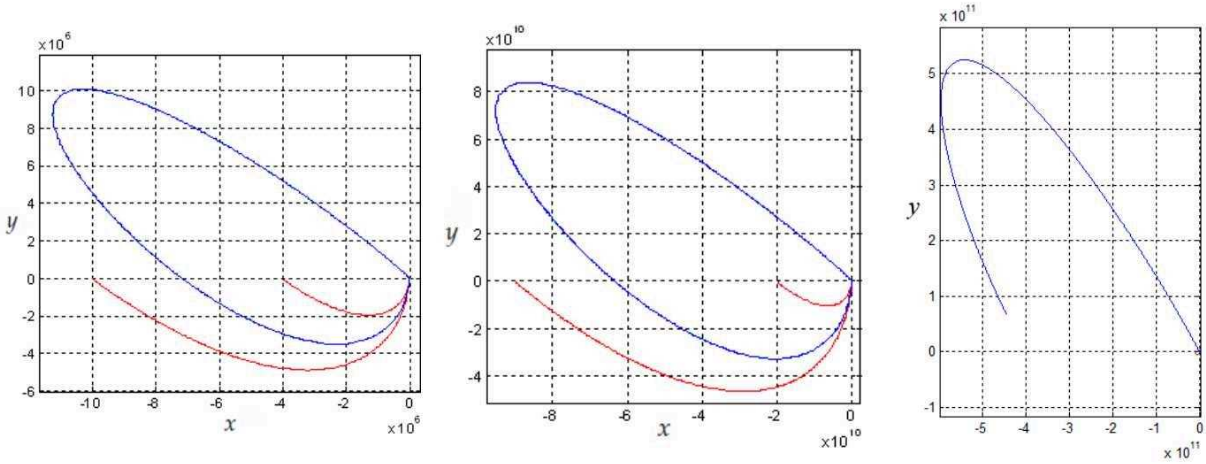

Рис. 3. “Разрушение” предельного цикла квадратичной системы.

Четвертая глава диссертации посвящена исследованию дискретного одномерного неунимодального отображения, описывающего работу цифровых систем фазовой синхронизации (ФАП), которые широко используются в компьютерных архитектурах и телекоммуникациях.

В работе проведено уточнение значений бифуркационных параметров и чисел Фейгенбаума, полученных в работах Г.А. Леонова и С.М. Селеджи.

Следуя работам T. Banerjee и B.C. Sarkar, рассматривается функциональная блок-схема цифровой ФАП, которая, в случае совпадения начальных частот эталонного и подстраиваемого генераторов, описывается дискретной динамической системой

$$\sigma(t+1) = \sigma(t) - r \sin \sigma(t), \quad t \in N, \tag{3}$$

где r – положительное число.

Отображение (3) не является унимодальным, что не позволяет применить напрямую известные методы теории ренорм-групп. Для вычисления бифуркационных значений системы (3) в работе применяется теория переходных процессов и численные процедуры.

В работе, с помощью компьютерного моделирования, построено бифуркационное дерево (Рис. 4) для системы (3), уточняющее результаты Г.А. Леонова и С.М. Селеджи.

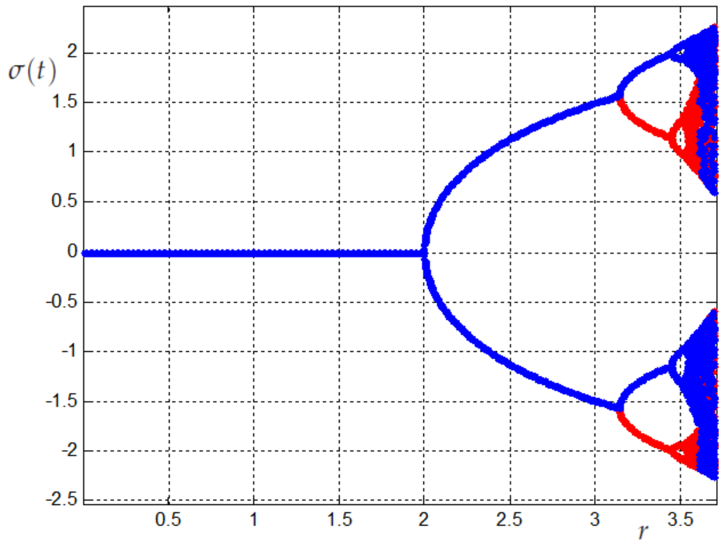

Рис. 4. Бифуркационное дерево.

Для изучения перехода к хаосу и вычисления бифуркационных параметров системы (3) в диссертации разработаны и реализованы алгоритмы, основанные на применении метода вычисления мультипликаторов. С помощью разработанных методов и специализированных математических пакетов численно получены первые 14 бифуркационных значения параметра r системы (3).

Для полученных бифуркационных значений параметра рассчитаны так называемые числа Фейгенбаума δ_j:

$$\delta_j = \frac{r_j - r_{j-1}}{r_{j+1} - r_j},$$

где r_{j-1}, r_j, r_{j+1}–последовательные бифуркационные значения параметра r.

Показано, что для неунимодального отображения (3) имеет место эффект сходимости, аналогичный эффекту сходимости Фейгенбаума, аналитически обоснованного для унимодальных отображений.

Приложения.

В Приложении 1 представлен компьютерный код для отображения “большого” предельного цикла двумерной квадратичной системы.

В Приложении 2 представлено полное символьное выражение третьей ляпуновской величины для двумерной квадратичной системы в общем виде.

В Приложении 3 представлен компьютерный код вычисления ляпуновских величин для двумерной квадратичной системы в общем виде.

В Приложении 4 представлен компьютерный код получения ляпуновских величин для системы Льенара.

В Приложении 5 представлен компьютерный код преобразований между двумерной квадратичной системой и системой Льенара.

В Приложении 6 представлен компьютерный код для реализации метода асимптотического интегрирования в системе Льенара.

В Приложении 7 представлен компьютерный код для моделирования области параметров двумерной квадратичной системы и соответствующей системы Льенара с четырьмя предельными циклами.

В Приложении 8 представлен компьютерный код, используемый для визуализации пространства параметров, рассмотренных S.L. Shi, на двумерной плоскости.

Публикации по теме диссертации.

1. Кудряшова Е.В. Вычисление бифуркационных параметров для цифровой системы фазовой автоподстройки // Вестник С.-Петерб. ун-та, 2009, Сер. 10, Вып. 3, С. 78–81.

2. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В. Циклы двумерных си-

стем. Компьютерные вычисления, доказательства, эксперименты // Вестник С.-Петерб. ун-та, 2008, Сер. 1, Вып. 3, С. 25–61.

3. Abramovich S., Kudryashova E., Leonov G., Sugden S. Discrete phase-locked loop systems and spreadsheets // Spreadsheets in Education (eJSiE), 2005, Vol. 2, Issue 1, p. 23–49. (http://epublications.bond.edu.au/ejsie/vol2/iss1/2)

4. Kudryashova E.V., Kuznetsov N.V. Period doubling bifurcation in discrete phase-locked loop // Workshop on Numerics in Dynamical Systems, Helsinki University of Technology, Institute of Mathematics Reports, 2009, p. 31 (ISSN 0784-6460).

5. Kudryashova E.V., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Neittaanmaki P. Large cycles in a series of computer experiments // Abstracts of Int. Conference "Space, astronomy and programming", 2008, p. 81.

6. Leonov G.A., Seledzhi S.M., Kudryashova E., Fyodorov A., Kuznetsova O. Analytical-numerical analysis methods of control system // Regular Oral Presentations, Proceedings of the 23rd IAR Workshop on Advanced Control and Diagnosis, 2008, p. 287–291.

7. Seledzhi S.M., Kudryashova E.V., Bifurcation of doubling period in phase locked-loops // International congress "Nonlinear dynamical analysis – 2007", book of abstracts, p. 384

8. Kudryashova E., Kuznetsov N., Period doubling bifurcation in discrete phase-locked loops // 4-th Int. Conference "PHYSCON", 2009, book of abstracts, p. 94