

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КАРЕВ Максим Владимирович

О НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ИНВАРИАНТАХ
УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2009

Работа выполнена в лаборатории теории представлений и вычислительной математики учреждения Российской академии наук “Санкт-Петербургское отделение математического института имени В. А. Стеклова РАН”.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
с.н.с. ДУЖИН Сергей Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
проф. ЛАНДО Сергей Константинович
(Государственный университет
“Высшая школа экономики”)

кандидат физико-математических наук,
с.н.с. ПОДКОРЫТОВ Семен Сергеевич
(ПОМИ РАН)

Ведущая организация: Математический институт имени
В. А. Стеклова РАН (г. Москва)

Защита диссертации состоится “__” декабря 2009 г. в _____ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском Государственном университете по адресу: 191011, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки 27, ауд. 311 (помещение ПОМИ РАН).

Адрес диссертационного совета: 198504, Санкт-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского отделения математического института имени В. А. Стеклова.

Автореферат разослан “__” ноября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.232.29 в СПбГУ

доктор физ.-мат. наук, профессор



В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена теории инвариантов узлов и зацеплений. На защиту выносятся три результата. Первый результат относится к теории инвариантов конечного типа. Второй — к комбинаторной теории гомологий Хегора-Флоера. Третий результат — к теории фундаментальных групп дополнений до зацеплений в трехмерной сфере S^3 .

Понятие инварианта конечного типа (или инварианта Васильева) для узлов независимо появилось в трудах В. А. Васильева¹ и М. Н. Гусарова². В. А. Васильев рассматривал эти инварианты как компоненты определенной фильтрации нулевых когомологий дополнения к дискриминантному множеству пространства гладких отображений прямой в \mathbb{R}^3 с фиксированной асимптотикой на бесконечности. Подход М. Н. Гусарова был более комбинаторным и основывался на изучении гауссовых диаграмм узлов. Вскоре выяснилось, что большое количество уже известных инвариантов узлов так или иначе связаны с инвариантами конечного типа, что и побудило многих исследователей к их тщательному изучению. Была высказана гипотеза о полноте класса инвариантов конечного типа, которая и по сей день остается ни доказанной, ни опровергнутой. Таким образом вопрос, насколько хорошо инварианты конечного типа могут различать узлы и, в частности, использоваться для определения ориентации, является одним из актуальных вопросов маломерной топологии.

Одна из глав диссертационной работы посвящена проблеме различения ориентации на длинных зацеплениях с помощью инвариантов конечного типа. Напомним, что длинным зацеплением называется гладкое вложение объединения нескольких ориентированных пронумерованных копий \mathbb{R}^1 в \mathbb{R}^3 со стандартной асимптотикой на бесконечности, рассматриваемое с точностью до изотопии, тождественной вне некоторого шара. Операция смены ориентации на длинных зацеплениях может быть определена так. Сначала мы изменяем ориентацию на всех компонентах параметризующего зацепление многообразия, а потом подвергаем \mathbb{R}^3 евклидову повороту на 180° . Очевидно, что при таком преобразовании мы

¹Например, В. А. Васильев *Топология дополнений к дискриминантам*. — М.: Фазис, 2007.

²М. Н. Гусаров *Новая форма полинома Конвея-Джонса для ориентированных зацеплений*. // Зап. научных семинаров ЛОМИ, **193**, Геометрия и топология, 1, 161, 1991, стр. 4–9.

снова получаем вложение того же класса. Мотивация этого определения основывается на том, что если применить указанное преобразование к длинному узлу, то мы получим узел с обращенной ориентацией в классическом смысле.

В 1964 году Троттер доказал³ необратимость некоторых узлов (например, крендельного узла $P_{3,5,7}$). Простейшим необратимым узлом является узел 8_{17} ⁴. Инварианты, используемые для доказательства неэквивалентности узла своему обратному, довольно сложны, и до сих пор не известно, можно ли различить какую-то пару взаимно обратных узлов при помощи инвариантов конечного типа.

Единственным опубликованным результатом по проблеме определения ориентации зацеплений является теорема Лина⁵, которая утверждает, что инварианты Васильева различают ориентацию замкнутых зацеплений с 6 или более компонентами. Имеется еще несколько работ, имеющих к этой задаче лишь косвенное отношение. Например, Бар-Натан⁶ изучает гомотопические инварианты струнных зацеплений, а Лин⁷ и Фидлер⁸ используют классы инвариантов, отличные от классических инвариантов конечного типа.

В случае длинных зацеплений переформулировка проблемы различения ориентации в терминах хордовых диаграмм немедленно показывает, что ответ утвердителен, если число компонент зацепления строго больше 2. В случае 2-компонентных зацеплений этот вопрос нетривиален и является одним из трех вопросов, изучаемых в диссертационной работе.

Следующая глава диссертационной работы посвящена комбинаторной теории гомологий Хегора–Флоера. Гомологии Хегора–Флоера родились как инвариант 3-многообразий, определенный через подсчет голоморфных дисков и диаграммы Хегора. В работах Ожвата-Сабо⁹ и Расмуссена¹⁰ был сконструирован аналог этого инварианта для гомологичных ну-

³H. F. Trotter *Non-invertible knots exist.* // Topology 2, 1964, pp. 275–280.

⁴A. Kawachi *The invertibility problem on amphichiral excellent knots.* // Proc. Japan Acad., Ser. A Math. Sci. 55, no. 10, 1979, pp. 399–402.

⁵X.-S. Lin *Finite type link invariants and the invertibility of links.* — Math. Res. Letters 3, 1996, no. 3, pp. 405–417.

⁶D. Bar-Natan *Vassiliev Homotopy String Link Invariants.* // Journal of Knot Theory and its Ramifications 4-1, 1995, pp. 13–32.

⁷X.-S. Lin *Finite type link invariants and the invertibility of links.* // Math. Res. Letters 3, 1996, no. 3, pp. 405–417.

⁸T. Fiedler *Isotopy invariants for closed braids and almost closed braids via loops in stratified spaces.* — Preprint, 2006.

⁹P. S. Ozsváth, Z. Szabò *Holomorphic Discs and Knot Invariants.* — // Adv. Math., 186, 2004, no.1, pp. 58–116.

¹⁰J. A. Rasmussen *Floer Homology and Knot Complement.* — PhD thesis. — Harvard University, 2003.

лю узлов в замкнутом ориентированном 3-многообразии. Впоследствии был найден замечательный способ подсчета этого инварианта для узлов в 3-сфере комбинаторными методами. Этот подход был развит в работе Манолеску-Ожвата-Сабо-Терстона¹¹.

Напомним, что категорификацией инварианта I , принимающего значение в некоторой абелевой группе, называется предъявление теории гомологий C_I , такой, что (градуированная) эйлерова характеристика в этой теории дает инвариант I , а гомологические группы (или даже сильнее, тип квазиизоморфизма) сами являются инвариантами. По-видимому, первым примером категорификации является построение клеточного цепного комплекса для эйлеровой характеристики CW -комплекса. Классическим современным примером служит комплекс Хованова (см. оригинальную работу Хованова¹² или обзор Бар-Натана¹³), категорифицирующий полином Джонса. Известно (см., например, работу Манолеску-Ожвата-Сабо-Терстона¹⁴), что гомологии Хегора-Флоера решают задачу категорификации полинома Александера.

К сожалению, вычисление гомологий Хегора-Флоера крайне трудоемко. Число образующих комплекса Флоера с ростом сложности зацепления растет факториальным образом. Поэтому хотелось бы иметь в руках способ, позволяющий упростить вычисления. Это напоминает ситуацию с полиномом Александера, оригинальное определение которого (см., например, книгу Рольфсена¹⁵) весьма неудобно для вычислений, однако наличие скейн-соотношений (известных еще Александеру) значительно упрощает дело. Оказывается, в случае с гомологиями Хегора-Флоера также есть инструмент, позволяющий вычислять их рекурсивно. Длинная точная последовательность, категорифицирующая разрешение перекрестка, была построена в работе Ожвата и Сабо¹⁶, а задача, которую мы ставим перед собой, является естественным продолжением этой деятельности. Мы рассматриваем зацепления, одна из компонент которых незаузленна и незацеплена с остальными и вычисляем гомологии Хегора-Флоера в этой ситуации.

¹¹C. Manolescu, P. S. Ozsvàth, Z. Szabò, D. P. Thurston *On Combinatorial Link Floer Homology*. — Preprint, 2006.

¹²M. Khovanov *A categorification of the Jones polynomial*. — // *Duke Math. J.* 101(2000) no. 3, pp. 359–426.

¹³D. Bar-Natan *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*. — // *Geom. Topol.* 9(2005), pp. 1443–1499.

¹⁴C. Manolescu, P. S. Ozsvàth, Z. Szabò, D. P. Thurston. *Opus citatum*.

¹⁵D. Rolfsen *Knots and links*. — AMS Bookstore, 2003.

¹⁶P. S. Ozsvàth, Z. Szabò *On the Skein exact sequence for knot Floer homology*. — Preprint, 2007.

Замечание. Гомологии Хегора-Флоера для несвязной суммы зацеплений были вычислены Ожватом и Сабо¹⁷ с использованием оригинальной техники подсчета голоморфных дисков. Однако в этой работе использовался менее тонкий вариант гомологий, в котором александровская градуировка имела только одну компоненту безотносительно к числу компонент зацепления. Вычисление, проведенное в настоящей работе, использует другой, более тонкий вариант гомологий Хегора-Флоера, а также развивает технику, которая может оказаться полезной при решении других задач.

Последняя глава диссертационной работы посвящена эпиморфизмам фундаментальных групп зацеплений. Интерес, испытываемый к фундаментальным группам различными исследователями, в первую очередь, связан с тем обстоятельством, что фундаментальная группа является довольно сильным инвариантом. В частности, простые узлы определяются своими фундаментальными группами однозначно. Изучение эпиморфизмов между группами зацеплений может быть мотивировано тем, что отношение “группа узла K допускает эпиморфизм на группу узла K' ” является частичным порядком на множестве всех простых узлов (см., например, работу Сильвера-Виттена¹⁸). Многие ожидают, что наличие этого отношения на множестве простых узлов когда-нибудь поможет найти новые связи между топологическими свойствами и инвариантами зацеплений. Хорошо известным примером подобной связи может служить такое утверждение: если существует эпиморфизм $\pi K \rightarrow \pi K'$, то полином Александра узла K делится на полином Александра K' (см., например, книгу Кроуэлла и Фокса¹⁹).

Систематический способ построения пар узлов, группы которых допускают эпиморфизм из одной в другую, был предложен Каваути²⁰. Его теория помогает построить узел, который имеет схожие с данным узлом топологические свойства. В частности, эта схожесть свойств индуцирует наличие эпиморфизма. Известны также эпиморфизмы групп зацеплений, получаемые при использовании симметрии, связных сумм и сателлитов.

¹⁷P. S. Ozsvàth, Z. Szabò *Holomorphic disks and knot invariants*. — // Adv. Math. 186, no. 1, 2004, pp. 58–116.

¹⁸D. S. Silver, W. Whitten *Knot group epimorphisms*. — // J. Knot Theory and Ramifications, 15(2), 2006, 153–166.

¹⁹R. H. Crowell, R. H. Fox *Introduction to Knot theory*. — Graduate text 57. — Springer-Verlag. — New-York, 1977.

²⁰A. Kawauchi *Topological imitations*. — // Lectures at KNOTS '96 (Tokyo), Ser. Knots Everything 15. — World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997, pp. 19-37.

Мы предлагаем еще один способ построения зацеплений, группы которых допускают эпиморфизм в группу данного зацепления. Наша конструкция проводится с помощью изучения свойств копредставления группы зацепления, получаемого из действия группы кос на свободной группе. Также мы показываем, что эпиморфизм из группы связной суммы зацепления L с узлом K в группу L и эпиморфизм, приходящий из факторизации по действию циклической группы, могут быть получены с помощью нашего метода.

Цель работы.

Основной целью диссертационной работы является изучение свойств таких комбинаторных инвариантов узлов и зацеплений, как инварианты Васильева, гомологии Хегора-Флоера и фундаментальная группа дополнения до замкнутого узла к трехмерной сфере S^3 .

Основные методы исследования.

Для доказательства различимости ориентации двукомпонентных длинных зацеплений использовались методы теории алгебр Ли (такие как теория универсальных обертывающих и симметрических алгебр). Для выражения гомологий Хегора-Флоера использовались методы гомологической алгебры, такие как построение длинной точной гомологической последовательности. Для построения серий зацеплений, группы которых допускают эпиморфизм в группу данного, использовались методы теории расширений групп.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Получено доказательство того факта, что инварианты конечного типа различают ориентацию двукомпонентных длинных неоснащенных зацеплений; указан способ построения инварианта двукомпонентных длинных неоснащенных зацеплений порядка 7, позволяющего определить ориентацию.
2. Найдена связь гомологии Хегора-Флоера зацепления, одна из компонент которого незаузлена и незацеплена с остальными, с гомоло-

гиями Хегора-Флоера зацепления, полученного из исходного выбрасыванием этой компоненты.

3. Для данного замкнутого зацепления L построена серия зацеплений, фундаментальная группа которых допускает эпиморфизм в фундаментальную группу данного. Показано, что для всех узлов K связанная сумма $L\#K$, а также разветвленное накрытие, ассоциированное с действием циклической группы на сфере S^3 , попадают в эту серию.

Практическая и теоретическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в различных задачах теории инвариантов узлов и зацеплений.

Апробация результатов.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. Семинар по маломерной математике под руководством С. В. Дужина, ПОМИ (2007).
2. Международная конференция “Algebra and Geometry around Knots and Links”, СПб (2007).
3. Русско-японский коллоквиум молодых математиков под руководством Т. Мива, Б. Л. Фейгина и Д. Б. Каледина, Киото (2009).
4. Санкт-Петербургский городской топологический семинар под руководством Н. Ю. Нецветаева (2009).

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в четырех работах, список которых приведен в конце автореферата [1–4]. В статье [1], написанной в соавторстве с С.В. Дужиным, автору диссертации принадлежит доказательство существования инварианта конечного типа, способного различать ориентацию оснащенных двукомпонентных зацеплений, в терминах

крашенных диаграмм Якоби и раздел о переходе к неоснащенному случаю. Соавтору принадлежит доказательство существования инварианта конечного типа, способного различать ориентацию оснащенных двукомпонентных зацеплений, в терминах хордовых диаграмм и компьютерная программа для вычисления весовых систем ϕ и ψ . Статья [1] опубликована в журнале, входящем в перечень ВАК. Остальные работы написаны соискателем без соавторов.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 51 странице и состоит из четырех глав и списка литературы. Список литературы содержит 42 наименования.

Краткое содержание работы

Первая глава диссертации носит вводный характер. В ней мотивируются исследования, проведенные в диссертации, кратко излагается содержание работы и формулируются основные результаты.

Вторая глава посвящена инвариантам конечного типа.

Мы определяем инварианты конечного типа для длинных зацеплений со значениями в поле характеристики 0 аналогично тому, как они определены в классическом случае узлов.²¹

Интеграл Концевича дает возможность изучать свойства инвариантов конечного типа для двукомпонентных длинных неоснащенных зацеплений в терминах пространства обобщенных хордовых диаграмм на двух нитях $\mathcal{A}(2)$. Напомним, что обобщенной хордовой диаграммой на двух нитях называется конечный (возможно, пустой) 1-3-валентный граф, снабженный двумя дополнительными структурами. Первая структура — это заданный циклический порядок полуребер, сходящихся в каждой трехвалентной вершине. Вторая структура — это сопоставление каждой одновалентной вершине графа элемента множества $\{1, 2\}$ (называемого цветом) и полное упорядочивание множества вершин, покрашенных в один и тот же цвет. Каждой хордовой диаграмме можно приписать степень — половину числа вершин соответствующего графа.

Пространством обобщенных хордовых диаграмм на двух нитях $\mathcal{A}(2)$ называется некоторое факторпространство векторного пространства, по-

²¹ см., например, D. Bar-Natan *On the Vassiliev knot invariants*. — // Topology, **34**, 1995, pp. 423–472.

рожденного всеми хордовыми диаграммами. Соотношения, участвующие в определении $\mathcal{A}(2)$, однородны по степени, что дает возможность ввести на $\mathcal{A}(2)$ структуру градуированного векторного пространства.

Замечание: на самом деле на $\mathcal{A}(2)$ можно ввести структуру локально конечной кокоммутативной алгебры Хопфа. Структурная теорема для алгебр Хопфа окажется чрезвычайно полезной для наших нужд при переходе к неоснащенному случаю.

Связь между фильтрованным пространством инвариантов Васильева (оснащенных) двумерными длинными зацеплениями и градуированным пространством $\mathcal{A}(2)$ состоит в том, что существует изоморфизм ассоциированного с фильтрацией градуированного пространства инвариантов Васильева на пространство, двойственное к $\mathcal{A}(2)$.

Оказывается, что существует инволюция τ_A пространства $\mathcal{A}(2)$, являющийся градуированным аналогом операции смены ориентации на зацеплении (лемма 2.1). Весовая система Концевича φ для заранее выбранной метризованной алгебры Ли \mathfrak{g} — это некоторое линейное отображение из $\mathcal{A}(2)$ в \mathfrak{g} -инвариантную часть тензорного квадрата универсальной обертывающей $\mathfrak{g} - U(2) = [U(\mathfrak{g})^{\otimes 2}]^{\mathfrak{g}}$. Можно показать, что существует инволюция τ_U пространства $U(2)$, которая делает диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(2) & \xrightarrow{\varphi} & U(2) \\ \downarrow \tau_A & & \downarrow \tau_U \\ \mathcal{A}(2) & \xrightarrow{\varphi} & U(2) \end{array}$$

коммутативной (лемма 2.3). Это дает возможность предъявить две обобщенные хордовые диаграммы степени 7, образы которых под действием φ неинвариантны относительно τ_U . Это значит, что сами диаграммы неинвариантны относительно τ_A . Впервые эти диаграммы были получены С. В. Дужиным.

Проверка τ_U -неинвариантности образа этих диаграмм в пространстве $U(2)$ была проведена с помощью компьютерной программы. Вычисление занимает несколько часов на современном компьютере средней мощности.

Существование диаграммы, неинвариантной относительно действия τ_A , можно доказать и по-другому. Двухцветной диаграммой Якоби назовем 1-3-валентный граф с циклической ориентацией полуребер, выходящих из каждой трехвалентной вершины, каждая из 1-валентных вершин которого покрашена в один из двух цветов (понятие диаграммы

Якоби отличается от понятия обобщенной хордовой диаграммы тем, что у диаграмм Якоби нет порядка на множестве одновалентных вершин). Степень диаграммы Якоби определяется аналогично степени хордовой диаграммы. Градуированное пространство диаграмм Якоби $\mathcal{B}(2)$ определяется как некоторое факторпространство векторного пространства, порожденного всеми диаграммами Якоби.

Пространство $\mathcal{B}(2)$ важно для нас не только существованием изоморфизма $\chi: \mathcal{B}(2) \rightarrow \mathcal{A}(2)$, но и тем, что оператор смены ориентации τ_B приобретает на нем особенно простой вид. А именно, если мы определим оператор τ_B на образующих диаграммах как умножение на (-1) в степени, равной числу одновалентных вершин, то следующая диаграмма, как доказывается в лемме 2.4, коммутативна:

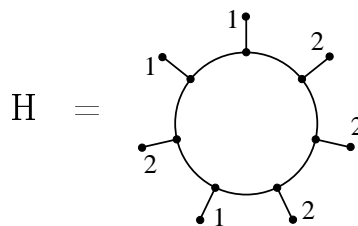
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(2) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{A}(2) \\ \downarrow \tau_B & & \downarrow \tau_A \\ \mathcal{B}(2) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{A}(2) \end{array}$$

Кроме этого можно также предъявить отображение $\psi: \mathcal{B}(2) \rightarrow S(2)$, где под $S(2)$ мы понимаем \mathfrak{g} -инвариантную часть второй тензорной степени симметрической алгебры для алгебры Ли \mathfrak{g} и инволюцию $\tau_S: S(2) \rightarrow S(2)$, такое, что куб

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{B}(2) & \xrightarrow{\psi} & S(2) \\ & \swarrow \tau_B & \downarrow & & \swarrow \tau_S \\ \mathcal{B}(2) & \xrightarrow{\psi} & S(2) & & \downarrow \pi \\ \downarrow \chi & & \downarrow \chi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{A}(2) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{A}(2) & \xrightarrow{\phi} & U(2) \\ & \swarrow \tau_A & \downarrow & & \swarrow \tau_U \\ \mathcal{A}(2) & \xrightarrow{\phi} & U(l) & & \end{array}$$

коммутативен (лемма 2.7; под π понимается отображение, индуцированное изоморфизмом Пуанкаре-Биркгофа-Витта).

Оказывается, что диаграмма



как элемент пространства $\mathcal{B}(2)$ отличается от своего образа под действием оператора τ_B . Эта проверка вполне доступна ручному счету.

Впервые диаграмма H , упомянутая выше, была найдена Д. Бар-Натаном: она фигурирует в файле `table.m` на его веб-сайте²² как один из базисных элементов пространства двуцветных диаграмм. Однако, в препринте, содержащем комментарии к этой таблице, сказано, что программа, при помощи которой она получена, не готова к публикации ввиду наличия некоторых недостатков в алгоритме. Кроме того, тот факт, что эта диаграмма отлична от своего образа под действием автоморфизма τ_B , остался автором незамеченным.

До сих пор речь шла про инварианты оснащенных зацеплений. Вообще говоря, определение ориентации оснащенного зацепления является более простой задачей, поскольку в теории с оснащениями есть дополнительная структура, которая (в принципе) может менять свои свойства при обращении. В разделе 2.6 объясняется, как полученные результаты переносятся на теорию без оснащений. Раздел 2.7 посвящен объяснению того, как можно построить необратимое зацепление и инвариант, различающий на нем ориентацию. Необратимое зацепление строится с помощью разрешения перекрестков сингулярного зацепления, получаемого по необратимой хордовой диаграмме. Интересующий нас инвариант является одним из членов в интеграле Концевича. Тем самым мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Существует инвариант Васильева f порядка, не превосходящего 7, и двухкомпонентное струнное зацепление L , такие, что $f(L') \neq f(L)$.*

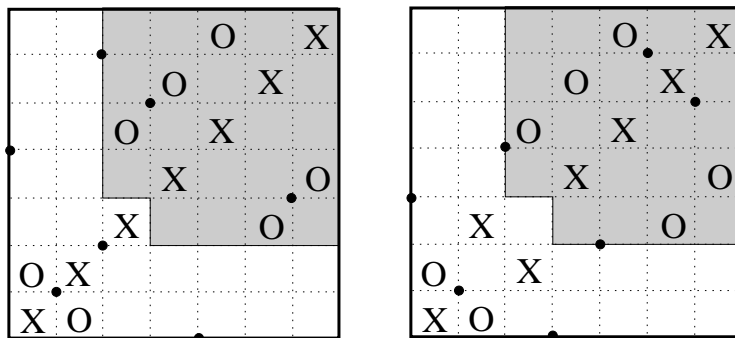
Третья глава посвящена гомологиям Хегора-Флоера для расширенных зацеплений, то есть таких, одна из компонент которых незаузлена и незацеплена с остальными. В первом разделе дается краткое определение гомологий Хегора-Флоера над полем $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ для замкнутых зацеплений из статьи Манолеску-Ожвата-Сабо-Терстона²³, описываются дифференциал, александровская и масловская градуировки. После чего для решеточной диаграммы G зацепления L вводится комплекс $\tilde{C}(G)$ (впервые предъявленный теми же авторами), гомологии которого отличаются от гомологий Хегора-Флоера зацепления L , являющихся инвариантом, легко контролируемым тензорным множителем.

²²<http://www.math.toronto.edu/~drorbn/LOP.html>

²³C. Manolescu, P. S. Ozsvàth, Z. Szabò, D. P. Thurston. *Opus citatum*.

Рассматривается произвольное зацепление L и его расширение L° , которое получается из L добавлением незаузленной и незацепленной компоненты. Выбирается специальная решеточная диаграмма G зацепления L° . После чего с помощью комбинаторных соображений доказывается (лемма 3.1), что комплекс $\tilde{C}(G)$ распадается в прямую сумму двух подкомплексов, гомологии которых изоморфны с некоторым сдвигом градуировки. Это позволяет свести задачу вычисления гомологий $\tilde{C}(G)$ к вычислению гомологий только одного из этих подкомплексов, обозначаемого F_1 .

Далее при помощи небольшой модификации диаграммы G (см. рисунок ниже) строится диаграмма G' , представляющая зацепление L . Рассматривается некоторый факторкомплекс F'_1 комплекса $\tilde{C}(G')$, тесно связанный с комплексом F_1 . А именно, оба этих комплекса включаются в качестве средних членов в некоторые короткие точные последовательности комплексов, крайние члены которых совпадают (с точностью до градуировки), но при этом переставлены местами.



Пример модификации решеточной диаграммы; слева представлена диаграмма G , справа — G' , общие части диаграмм залиты серым

С помощью комбинаторных соображений устанавливается, что гомологии комплекса F'_1 изоморфны гомологиям комплекса $\tilde{C}(G'_1)$, где G'_1 — некоторая диаграмма, представляющая зацепление L . Гомологии одного из комплексов, входящего в короткие точные последовательности, упомянутые в предыдущем абзаце, изоморфны гомологиям комплекса $\tilde{C}(G'_2)$, где G'_2 — еще одна диаграмма, представляющая L . Гомологии комплекса $\tilde{C}(G'_1)$ отличаются от гомологий $\tilde{C}(G'_2)$ тензорным множителем размерности 2.

Далее с помощью явного предъявления расщепляющего морфизма мы доказываем, что короткая точная последовательность комплексов, включающая F'_1 , расщепляется (лемма 3.2). Таким образом, гомологии

F_1' представляют собой прямую сумму гомологий комплексов, включающихся в короткую точную последовательность, а гомологии одного из них уже известны. Это дает возможность найти гомологии второго. Вместе с тем фактом, что короткая точная последовательность для комплекса F_1 также расщепляется (лемма 3.3; также явно предъявлен расщепляющий морфизм), это дает нам возможность выразить гомологии Хегора-Флоера зацепления L° через гомологии зацепления L . А именно, имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Имеет место следующее соотношение, связывающее полиномы Пуанкаре гомологий Флоера для зацепления L и его расширения L° :*

$$\widehat{P}(L^\circ) = (1 + k^{-1})\widehat{P}(L),$$

где под расширением понимается добавление к зацеплению незаузленной и незацепленной с остальными компонентами.

Четвертая глава посвящена эпиморфизмам групп зацеплений. Мы показываем, как с помощью хорошо известного действия группы кос на свободной группе можно получить копредставление фундаментальной группы зацепления в виде короткой точной последовательности

$$1 \rightarrow N_b \rightarrow F_n \rightarrow \pi L_b \rightarrow 1,$$

где b — элемент группы кос на n нитях B_n , F_n — свободная группа на n образующих, πL_b — фундаментальная группа зацепления, получаемого замыканием косы b , а N_b — нормальная подгруппа свободной группы, порожденная элементами $b(v)v^{-1}$ для всех $v \in F_n$. Аналогичное копредставление было построено в книге Бирман²⁴.

Рассмотрим две операции над косами.

- *Обращение.* Коса $b \in B_n$ переводится в косу $b^{-1} \in B_n$.
- *Связная сумма с тривиальным узлом.* Эта операция увеличивает число нитей в косе. Пусть коса $b \in B_n$. Зададимся некоторым натуральным числом $m > n$. Рассмотрим вложения $\rho_1: B_n \rightarrow B_m$ и $\rho_2: B_{m-n+1} \rightarrow B_m$, заданные формулами:

$$\begin{aligned}\rho_1(\sigma_i^n) &= \sigma_i^m, \\ \rho_2(\sigma_i^{m-n+1}) &= \sigma_{n+i-1}^m,\end{aligned}$$

²⁴J. Birman *Braids, Links and Mapping class groups*. — Princeton University Press, 1975.

где σ_i^j — i -тая артиновская образующая группы кос на j нитях. Возьмем произвольную косу $b' \in B_{m-n+1}$, замыкание которой является тривиальным узлом. Тогда операция связной суммы с тривиальным узлом заключается в переходе от косы $b \in B_n$ к косе $\rho_1(b)\rho_2(b') \in B_m$.

Оказывается, что для всех кос на n нитях, замыкание которых является тривиальным узлом, ядро копредставления будет одинаковым, поскольку все образующие свободной группы в таком копредставлении переводятся в меридианы замыкания. Из представления связной суммы зацеплений в виде замыкания косы следует, что при связной сумме с тривиальным узлом все добавляемые образующие дают один и тот же элемент группы зацепления. Также можно легко проверить, что копредставление замыкания обратной косы совпадает с исходным. Эти утверждения составляют содержание предложения 4.1.

Основная теорема этой главы диссертации формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть зацепление L представлено в виде замыкания косы $b \in B_n$. Рассмотрим набор кос $b_1, \dots, b_k \in B_n$, каждая из которых может быть получена из b с помощью применения произвольной конечной последовательности операций обращения и связной суммы с тривиальным узлом. Тогда группа замыкания косы $b_1 \dots b_k$ допускает эпиморфизм на группу замыкания косы b .*

Доказательство этой теоремы существенным образом использует предложение 4.1 и основано на том, что ядро копредставления группы замыкания косы $b_1 \dots b_n$ содержится в ядре копредставления группы замыкания каждой из кос b_i .

Остаток главы посвящен обсуждению двух следствий теоремы 3, согласно которым построенное по данному зацеплению семейство зацеплений, группы которых допускают эпиморфизм на группу данного, включает в себя связные суммы со всеми возможными узлами (предложение 4.2) и зацепления, из которых данное получается действием циклической группы на сфере S^3 (предложение 4.3). Доказательство предложения 4.2 основывается на лемме 4.1, согласно которой любой узел допускает представление в виде замыкания произведения нечетного числа квазиторических кос, то есть кос, получаемых из стандартной торической косы путем изменения произвольных перекрестков. Предложение 4.3 вытекает из теоремы 3 с помощью предположения, что все косы b_i одинаковы.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность к. ф.-м. н. С. В. Дужину за мудрое научное руководство и постоянное внимание к моей работе.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

- [1] *Дужин С. В., Карев М. В.* Определение ориентации струнных зацеплений при помощи инвариантов конечного типа // Функ. анализ и его прил., 2007, 41:3, стр. 48-59.

Другие публикации:

- [2] *Карев М. В.* Гомологии Хегора-Флоера для зацеплений с тривиальной компонентой. // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2007, **344**, 37–55.
- [3] *Karev M. V.* Heegaard-Floer homology of a link with trivial component added. // Сборник тезисов международной конференции “Algebra and Geometry around Knots and Braids”, СПб, 2007 г.
- [4] *Карев М. В.* Группа кос и эпиморфизмы групп зацеплений // Препринты ПОМИ, н. 7 (2009).