САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЯХОНТОВ Сергей Викторович

РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РАБОТЫ С FLINSPACE КОНСТРУКТИВНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЧИСЛАМИ И АЛГОРИТМИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ НАД НИМИ

05.13.17 — Теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009

Работа выполнена на кафедре информатики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор КОСОВСКИЙ Николай Кириллович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ОРЕВКОВ Владимир Павлович (ведущий научный сотрудник лаборатории математической логики, Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова)
	кандидат физико-математических наук, доцент ТИШКОВ Артем Валерьевич (старший научный сотрудник, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН)
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Защита состоится "______"________________ 2009 г. в ______ часов на заседании совета Д 212.232.51 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д.28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "______"_______________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Даугавет И. К.

Содержание работы

Актуальность темы. С появлением вычислительной техники встал вопрос о вычислительной сложности объектов математического анализа, в первую очередь основных классов вещественных чисел и функций. Среди работ последних 18 лет, в которых исследовалась вычислительная сложность конструктивных вещественных чисел и функций, отметим [5–7]. Данные работы в значительной степени являются обобщением накопленных знаний относительно вычислимого математического анализа и отражают современное состояние исследований в данной области. Работы [5–7] характеризуются тем, что авторы в основном рассматривают временную вычислительную сложность проблем математического анализа. В [7] вычислительная сложность рассматривается с точки зрения времени выполнения и длины входной ленты, достаточных для получения приближенных значений вещественных чисел и функций с произвольной точностью. Здесь же приводится ряд теорем относительно вычислительной сложности арифметических операций и некоторых понятий из теории функций вещественного переменного. В [5, 6] строится система полиномиально вычислимого анализа, при этом главное внимание уделяется построению и определению свойств классов конструктивных вещественных чисел и функций, аналогичных классам из теории вычислительной сложности. Линейная емкостная сложность объектов математического анализа, для оценки которой важно знать объем промежуточных вычислений, в работах [5–7] почти не затронута.

Вместе с тем, представляет существенный теоретический и практический интерес построение системы конструктивных вещественных чисел и функций, которая позволяла бы выполнять базовые вычисления в пределах некоторого емкостного класса сложности, подпадающего под понятие «осуществимые вычисления», как, например, класс FP, т. е. класс вычислений на машинах Тьюринга за полиномиальное время от длины исходных данных [4]. Теоретический интерес имеет место в силу неизвестной точной взаимосвязи классов временной и емкостной вычислительной сложности; практический интерес следует из того, что получающиеся алгоритмы вычисления приближенных значений относительно проще, что немаловажно для уменьшения сложности программного обеспечения, например, в области численных расчетов. В качестве такого класса в данной работе выбран $FLINSPACE$ [4] — класс алгоритмов, для которых длина каждой промежуточной записи вычисления ограничена линейной функцией от суммарной длины входных данных. Подтверждением неформальной характеристики класса $FLINSPACE$ как класса осуществимых вычислений с точки зрения требуемой для вычислений памяти может служить то, что в настоящее время в работах по теоретической информатике для вычислений в пределах $FLINSPACE$ утвердился термин «space-efficient evaluation». Известно, что класс $FLINSPACE$ не совпадает с классом FP и, кроме того, если $FLINSPACE \subseteq FP$, то $P = NP$ [1]. Следовательно, результаты относительно $FLINSPACE$ вычислимости объектов математического анализа не следуют непосредственно из FP вычислимости этих объектов и требуют отдельного доказательства в предположении $P \neq NP$, которое поддерживается многими специалистами в области математических основ информатики.

Введем обозначение $FP//LINSPACE$ для класса алгоритмов, вычислимых машиной Тьюринга за полиномиальное время и на линейной зоне. Под алгоритмическими функциями (конструктивными функциями) над конструктивными числами будем понимать алгоритмы, вычисляющие приближения значений функций по приближениям аргумента.

Цели работы. Показать, что для вещественных чисел и функций математического анализа, наиболее часто используемых на практике, можно построить конструктивные аналоги, позволяющие находить приближения в пределах класса $FP//LINSPACE$. Разработать алгоритмы для работы с $FLINSPACE$ вычислимыми приближениями объектов математического анализа, которые реализуемы на объектно-ориентированном языке программирования. Реализовать такие алгоритмы на языке программирования `C#` в среде программирования `Microsoft Visual Studio 7.1`.

Методы исследования. Для построения и оценки вычислительной сложности алгоритмов использовались аппарат численных методов, математический анализ, теория вычислительной сложности, аппарат конструктивного математического анализа. При реализации библиотеки классов использовались такие элементы программирования, как абстрактные классы, функторы, интерфейсы, итераторы.

Научная новизна. Новым является изучение достаточно широкого класса вещественных чисел и функций с точки зрения вычисления двоично-рациональных приближений в пределах класса $FLINSPACE$, как весьма важного для практических вычислений.

Практическая ценность. Практическая ценность диссертации состоит в том, что предложенные алгоритмы и библиотека классов на языке программирования `C#` могут использоваться в различных системах численных расчетов, требующих вычислений с вещественными числами и функциями с любой заданной точностью.

Апробация работы. Результаты работы обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

- V Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Ратмино, 26—29 мая 2003 г.);
- VIII Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2—6 февраля 2004 г.);
- IX Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 18—23 июня 2007 г.);
- семинар кафедры вычислительных методов математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета;
- семинар кафедры информатики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Публикации. По теме диссертации опубликованы тезисы [8–10] и статьи [11, 12]. В [8, 11] содержатся результаты о емкостной вычислительной сложности алгоритма Штурма и $FP//LINSPACE$ конструктивности алгебраических чисел, а также рассмотрены арифметические операции на множестве $FLINSPACE$ конструктивных вещественных чисел.

В [9,10,12] предложены алгоритмы для вычисления степенных рядов в пределах $FP//LINSPACE$ и доказана $FP//LINSPACE$ конструктивность некоторых элементарных функций. В статье [12] имеется описание библиотеки классов на языке программирования `C#` для работы с $FLINSPACE$ конструктивными вещественными числами и функциями. Статьи [11, 12] входят в перечень изданий, рекомендованных ВАК для публикаций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, списка таблиц, предметного указателя и приложения. Содержит 1 рисунок, 2 таблицы и список цитируемой литературы из 35 наименований. Текст диссертации изложен на 113 страницах. Исходные тексты библиотеки классов на языке программирования `C#` находятся в приложении на 54 страницах.

Общая характеристика работы

Во **введении** показывается актуальность темы, дана общая постановка задачи, кратко излагается содержание работы. Обосновывается выбор класса $FLINSPACE$ как базового класса для построения эффективной с вычислительной точки зрения системы конструктивных вещественных чисел и функций, при этом аргументация данного выбора основывается на свойствах класса $FLINSPACE$, изложенных в работе [1].

В **первой главе** формулируются основные понятия конструктивного математического анализа [3]. Кратко излагается история развития предмета. Приводится обзор литературы по известным способам построения системы конструктивных вещественных чисел и функций и по различным подходам к исследованию вычислительной сложности конструктивных объектов математического анализа. Из [4] приводятся необходимые сведения о классах вычислительной сложности. Также сравниваются известные методы построения алгоритмов расчета констант и элементарных функций такие, как арифметико-геометрическое среднее и разложение в ряды с рациональными коэффициентами.

Затем описываются основные идеи подхода, изложенного в работах [5,6].

Данная диссертация основана на этом подходе к исследованию вычислительной сложности конструктивных чисел и функций. В качестве вычислительной используется модель, использующая понятие машины Тьюринга, а основу представления конструктивных объектов составляет понятие вычислимой последовательности, сходящейся по Коши, $\phi : N \to D$ (здесь и далее N — множество всех натуральных чисел, включая 0). В качестве множества аппроксимирующих значений D берется множество двоично-рациональных чисел (D является всюду плотным в R естественным для компьютерного использования подмножеством множества рациональных чисел). Для последовательности, сходящейся по Коши и задающей конструктивный объект x, требуют, чтобы выполнялось $|\phi(n) - x| \leq 2^{-n}$ для любого натурального n.

Рациональное число d называется двоично-рациональным, если $d = \frac{m}{2^n}$ для некоторого целого m и натурального n. Числа из D имеют конечное двоичное представление: строка s, равная $\pm u_p u_{p-1} \dots u_0 . v_1 v_2 \dots v_r$, обозначает число $d = \pm \sum_{i=0}^{p} u_i 2^i \pm \sum_{j=1}^{r} v_j 2^{-j}$. Под точностью представления $prec(d)$ понимается число битов справа от двоичной точки, т. е. число r. С точки зрения изучения вычислительной сложности двоично-рациональные числа удобны тем, что для любого n числа из D с точностью n равномерно распределены на вещественной прямой.

Последовательность $\phi : N \to D$ двоично-рационально сходится к вещественному числу x, если для любого $n \in N$ выполняется $prec(\phi(n)) = n + 1$ и $|\phi(n) - x| \leq 2^{-n}$. Множество всех вычислимых функций, двоично-рационально сходящихся к вещественному числу x, обозначается CF_x. Вещественное число x называется CF конструктивным, если CF_x не пусто.

Вещественная функция f, заданная на $[a, b]$, называется CF конструктивной вещественной функцией на этом отрезке, если существует машина Тьюринга M с оракульной функцией такая, что для любого $x \in [a, b]$ и любой функции $\phi \in CF_x$ машина M^ϕ по произвольной точности 2^{-n}, $n \in N$, последовательно вычисляет $m \in N$ и $d \in D$ так, что выполняются неравенства

$$|\phi(m) - x| \leq 2^{-m}, \quad |d - f(x)| \leq 2^{-n}.$$

Под построением конструктивного аналога вещественного числа или вещественной функции f на отрезке $[a, b]$ понимается описание алгоритма, вычисляющего приближения из D с произвольной точностью данного числа или значений $f(x)$ для $x \in [a, b]$.

Вычислительная сложность конструктивных чисел и функций определяется в [5] как сложность алгоритмов, вычисляющих приближенные значения. Входными данными таких алгоритмов является точность вычисления 2^{-n}, которая записывается на входе как последовательность из n нулей (обозначается 0^n), и поэтому под длиной входных данных понимается n.

Целью **второй главы** являются определение и основные свойства конструктивных вещественных чисел и функций с ограниченной линейной функцией сложностью вычисления двоично-рациональных приближений.

В *разделе 2.2* проводится построение множеств $FLINSPACE$ конструктивных вещественных чисел и функций [12].

Определение 1. *Число x из R называем $FLINSPACE$ конструктивным вещественным числом, если существует $FLINSPACE$ вычислимая функция $\phi \in CF_x$.*

Говорят, что однородная емкостная вычислительная сложность функции f на отрезке $[a, b]$ ограничена функцией $s : N \to N$, если существует машина Тьюринга M с оракульной функцией такая, что для любого $x \in [a, b]$ и любой функции $\phi \in CF_x$ машина M^ϕ вычисляет приближение $f(x)$ с точностью 2^{-n} так, что при этом используется не более $s(n)$ ячеек промежуточной памяти.

Определение 2. *Функцию $f : [a, b] \to R$ называем $FLINSPACE$ конструктивной вещественной функцией на отрезке $[a, b]$, если однородная емкостная вычислительная сложность функции f ограничена линейной функцией.*

Множества $FLINSPACE$ конструктивных чисел и функций обозначаются $FLINSPACE_{CF}$ и $FLINSPACE_{C[a,b]}$ соответственно. Индекс $C[a, b]$ в обозначении $FLINSPACE_{C[a,b]}$ обусловлен тем, что конструктивные функции являются непрерывными на всей области определения [5]. Аналогичным образом определяются $FP//LINSPACE$ конструктивные вещественные числа и функции.

Рассматриваются арифметические операции на $FLINSPACE_{CF}$ [11]. Основная идея алгоритмов арифметических операций состоит в вычислении двоично-рациональных приближений аргументов с точностью, достаточной для вычисления результата, и затем выполнении арифметической операции над полученными приближениями. Устанавливается замкнутость $FLINSPACE_{CF}$ относительно таких операций.

Для операций обращения и деления обычно используется расчет нижней границы модуля числа по двоично-рациональным приближениям, что в общем случае может оказаться вычислением вне класса $FLINSPACE$. Поэтому для эффективной реализации обращения и деления определяются множество l_α и операция $high$:

- l_α для $\alpha \neq 0$ — множество натуральных k, $k \geq 0$, таких, что $|\alpha| \geq 2^k$;
- $high(\alpha)$ — произвольное целое k такое, что $|\alpha| \leq 2^k$.

Показывается, каким образом можно вычислять элементы l_α для результатов арифметических операций.

В *разделах* 2.4 и 2.5 рассматриваются вещественные функции одного аргумента, представимые степенными рядами двух видов, и показывается вычислимость таких функций в пределах $FLINSPACE$ [9,12] при условии линейной сходимости соответствующих рядов на отрезке $[-\varrho, \varrho]$ из области сходимости, т. е. если для остаточного члена выполняется $|r_{\mu(n)}(x)| \leq 2^{-n}$ для любого $x \in [-\varrho, \varrho]$, где $0 \leq \mu(n) \leq C_1 n + C_2$ (при этом предполагается, что μ вычисляется алгоритмом класса $FLINSPACE$).

Предположим, что имеется степенной ряд

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots \qquad (1)$$

для x из $[-\varrho, \varrho]$, $\varrho > 0$, $\varrho \leq \rho$, где ρ — радиус сходимости. Пусть a_i — $FLINSPACE$ конструктивные числа, x — $FLINSPACE$ конструктивное число из отрезка $[-\varrho, \varrho]$, α_i — $FLINSPACE$ вычислимые функции из CF_{α_i},

ϕ — $FLINSPACE$ вычислимая функция из CF_x. Пусть также m — некоторое натуральное число, $\alpha_i(m)$ — двоично-рациональные приближения коэффициентов a_i с точностью 2^{-m}, $\phi(m)$ — двоично-рациональные приближения аргумента x с точностью 2^{-m}.

Рассматриваются частичные суммы $S_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ ряда (1) с подстановкой $\alpha_i(m)$ вместо коэффициентов a_i и $\phi(m)$ вместо аргумента x:

$$S_k(m) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i(m)\phi(m)^i.$$

Для расчета приближенных значений $S_k^*(m)$ таких выражений используется схема Горнера с округлением промежуточных результатов:

$$\begin{aligned} & h_0(m) = \alpha_k(m), \\ & \widehat{h}_r(m) = \alpha_{k-r}(m) + h_{r-1}(m)\phi(m), \\ & h_r(m) = \widehat{h}_r(m) + \varepsilon_r, \end{aligned} \tag{2}$$

где $r = 1, 2, \ldots, k$; при $r = k$ полагается $S_k^*(m) = h_k(m)$. Величины $h_r(m)$ получаются отбрасыванием битов $q_{m+1}q_{m+2}\ldots q_{m+p}$ чисел $\widehat{h}_r(m)$ после двоичной точки, начиная с $(m+1)$-го, т. е.

$$|\varepsilon_r| = |h_r(m) - \widehat{h}_r(m)| = 0.0\ldots0q_{m+1}q_{m+2}\ldots q_{m+p},$$

а знак ϵ_r совпадает со знаком $\widehat{h}_r(m)$. Оценивается погрешность вычислений $\Delta(k,m) = |S_k^*(m) - S_k(x)|$ при следующих ограничениях на модуль a_i и ϱ:

$$|a_i| \leq 1 \text{ для всех } i, \quad \varrho \leq \frac{3}{4} + 2^{-5}.$$

Утверждение 1. *Если $m \geq 5$, то погрешность вычислений по схеме* (2) *оценивается как*

$$\Delta(k,m) < 2^{-m}2^5(k+1). \tag{3}$$

Пусть требуется вычислить приближенное значение частичной суммы $S_{\mu(k)}(x)$ ряда (1) с точностью 2^{-k} для некоторого натурального k. Положим

$$m = m(k) = m(k_1,k_2) = 5 + \lceil \log_2(k_1+1) \rceil + k_2, \tag{4}$$

где $k_1 = \mu(k)$, $k_2 = k$. Тогда $m \geq 5$, и, следовательно, погрешность вычисления $S_{\mu(k)}(x)$ оценивается как $\Delta(\mu(k), m(k)) < 2^{-k}$. Так как для остаточного члена выполняется $|r_\zeta(x)| = |S_\zeta(x) - S(x)| \leq 2^{-(n+1)}$ для любого $x \in [-\varrho, \varrho]$, где $\zeta = \mu(n+1)$, то $|S^*_\zeta(m) - S(x)| \leq \Delta(\zeta, m) + 2^{-(n+1)}$. Возьмем $m = m(k_1, k_2)$ по формуле (4) для $k_1 = \mu(n+1)$, $k_2 = n+1$. Тогда

$$|S^*_\zeta(m) - S(x)| < 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}.$$

Так как $\mu(n)$ ограничена сверху линейной функцией, то линейной зависимости m от n достаточно для вычисления суммы степенного ряда (1) на отрезке $[-\varrho, \varrho]$ с требуемой точностью.

Предположим, что коэффициенты a_i ряда (1) получаются последовательным умножением на некоторые величины с ростом номера коэффициента, т. е. $a_i = a_{i-1}b_i$, с начальным значением $a_0 = b_0$:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = b_0 + b_0 b_1 x + b_0 b_1 b_2 x^2 + \ldots + b_0 \ldots b_{k-1} b_k x^k + \ldots \tag{5}$$

При вычислении $S_k(m)$ удобно не пересчитывать коэффициенты a_i, а накапливать их значение вместе с вычислением промежуточных величин. Поэтому для расчета приближений $S^*_k(m)$ величин $S_k(m)$ используется следующая схема с округлением промежуточных результатов, отличная от (2):

$$\begin{aligned} &h_0(m) = \beta_k(m), \\ &\widehat{h}_r(m) = \beta_{k-r}(m)[1 + h_{r-1}(m)\phi(m)], \\ &h_r(m) = \widehat{h}_r(m) + \varepsilon_r, \end{aligned} \tag{6}$$

где $r = 1, 2, \ldots, k$; при $r = k$ полагается $S^*_k(m) = h_k(m)$. Проводится оценка погрешности $\Delta(k, m)$ для такой схемы, аналогичная (3).

На основании вычислительных процессов (2) и (6) строятся алгоритмы $SeriesSum_1$ и $SeriesSum_2$ расчета приближений рядов (1) и (5).

Теорема 1. *Если степенной ряд вида* (1) *аналитической функции* $f(x)$ *линейно сходится на отрезке* $[-\varrho, \varrho]$, $\varrho \leq \frac{3}{4} + 2^{-5}$, *и коэффициенты* a_i *являются* $FLINSPACE$ *вычислимыми, то* $f(x) \in FLINSPACE_{C[-\varrho,\varrho]}$.

Аналогичная теорема формулируется для функций, представимых рядами вида (5). Если коэффициенты ряда аналитической функции f являются также полиномиально вычислимыми по времени, то f будет принадлежать $FP//LINSPACE_{C[-\varrho,\varrho]}$.

В **третьей главе** рассматриваются конструктивные объекты математического анализа, наиболее часто используемые на практике, и доказывается $FP//LINSPACE$ вычислимость таких объектов, при этом для построения алгоритмов вычисления приближений используются только разложения в ряды и эквивалентные преобразования.

В *разделе 3.1* устанавливается $FP//LINSPACE$ конструктивность алгебраических и некоторых трансцендентных чисел. Из известных результатов приводится ссылка на статью [2] и ссылки на ряд других работ.

Для построения конструктивных аналогов алгебраических чисел [8, 11] используется стандартное представление вещественных корней полинома $P \in Z[x]$ списком отделяющих интервалов, при этом такой список вычисляется с помощью алгоритма Штурма. Предполагается, что полином задается списком всех своих коэффициентов, включая нулевые.

Теорема 2. *Пусть* $P(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i x^i$ *— примитивный полином с целыми коэффициентами, свободный от квадратов. Тогда емкостная сложность алгоритма Штурма ограничена сверху функцией* $C(m^3 l(m) + m^2 w(P))$.

Здесь $l(m)$ — длина двоичной записи m, $w(P) = (m+1)(l(h(P)) + 1)$, $h(P) = \max_{i=1}^{m} |p_i|$ — полунорма полинома P. Алгоритм Штурма позволяет по полиному $P \in Z[x]$ построить набор CF конструктивных вещественных чисел, являющихся конструктивными аналогами корней полинома P. Для вычисления рациональных приближений к корню α используется итеративный алгоритм, на каждом шаге которого интервал, содержащий α, делится на два подинтервала. Если 2^{-n} — заданная точность вычисления двоично-рационального приближения, то для концевых точек τ получающихся подинтервалов и значений $P(\tau)$ в этих точках выполняются неравенства $l(\tau) \le C_1 n$, $l(P(\tau)) \le C_2 n$.

Теорема 3. *Пусть* $P \in Z[x]$ *— примитивный полином, свободный от квадратов,* $\{\alpha_i\}$ *— набор вещественных корней* P. *Тогда каждое число из набора* $\{\alpha_i\}$ *принадлежит* $FP//LINSPACE_{CF}$.

Для построения конструктивных аналогов трансцендентных чисел π и e используется формула Мэшина (J. Machin) для числа π:

$$\pi = 16\alpha - 4\beta, \quad \alpha = \mathrm{arctg}(5^{-1}), \quad \beta = \mathrm{arctg}(239^{-1}),$$

и ряд $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ для числа e.

В *разделе 3.2* рассматривается вычислительная сложность основных элементарных функций. Для небольших по абсолютному значений аргументов элементарные функции вычисляются напрямую с помощью подходящего алгоритма для степенного ряда. Расчет таких функций на всей области определения выполняется с использованием аддитивной или мультипликативной редукции интервала.

Покажем схему расчета в пределах $FP//LINSPACE$ элементарных функций на примере логарифмической функции [10, 12].

Ряд Тейлора логарифмической функции $\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{(i-1)} \frac{x^i}{i}$ сходится для значений x в интервале $(-1, 1]$. С помощью мультипликативной редукции интервала вычисление логарифма для аргумента $u = 1 + x$ сводится к расчету логарифма для аргумента $\frac{u}{2^r}$:

$$\ln(u) = \ln\left(\frac{u}{2^r}2^r\right) = \ln\left(\frac{u}{2^r}\right) + r \cdot \ln(2) = \ln\left(\frac{u}{2^r}\right) - r \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right);$$

здесь r — некоторое целое число. Введем следующие обозначения: $u' = \frac{u}{2^r}$, x^* — приближение x, $(u')^*$ — приближение u'. Приближенные значения аргумента конструктивной функции являются двоично-рациональными числами, а такие числа, как уже говорилось, имеют конечное двоичное представление. Поэтому для вычисления $(u')^*$ достаточно сдвигать битовое представление u^* так, чтобы старший значащий бит оказался сразу после двоичной точки (т. е. $(u')^* = 0.1\ldots$). Если $u^* \geq 1$, то $r > 0$, иначе $r \leq 0$. При этом $(u')^*$ будет принадлежать интервалу $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, а величина $(x')^*$, равная $(u')^* - 1$, будет находиться в интервале $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$. Так как $(x')^* \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, то $x' \in \left[-\frac{1}{2} - 2^{-5}, 2^{-5}\right)$ при условии, что x' вычисляется с точностью 2^{-m}, $m \geq 5$. Обозначим интервал $\left[-\frac{1}{2} - 2^{-5}, 2^{-5}\right)$ через $\sigma(5)$.

Для модуля остаточного члена логарифмического ряда на интервале $\left[-\frac{1}{2} - 2^{-5}, 0\right)$ имеет место оценка $|r_n(x')| < 2^{-0.9(n+1)+2}$. Для $x' \in \left[0, 2^{-5}\right)$

заведомо будет $|r_n(x')| < 2^{-n}$. То есть логарифмический ряд линейно сходится на интервале $\sigma(5)$. Так как коэффициенты данного ряда ограничены по модулю сверху 1 и $\sigma(5) \subset [-\varrho, \varrho]$, где $\varrho = \frac{1}{2} + 2^{-5}$, то используется схема (2) для расчета логарифмического ряда в пределах $FP//LINSPACE$ для x' на интервале $\sigma(5)$, в частности для расчета $\ln(2^{-1}) = \ln(1 - 2^{-1})$. При этом в качестве $\mu(n+1)$ берется выражение $\lceil 1.2n + 3 \rceil$, так как в этом случае будет $|r_{\mu(n+1)}(x')| < 2^{-0.9(1.2n+3+1)+2} < 2^{-(n+1)}$.

Учитывая, что $k_1 = \lceil 1.2n+3 \rceil$, $k_2 = n+1$, получаем точность аргумента, достаточную для определения значения $\ln(1 + x')$ с точностью 2^{-n}:

$$2^{-m(k_1,k_2)}, \quad \text{где} \quad m(k_1, k_2) = 5 + \lceil \log_2(k_1 + 1) \rceil + k_2.$$

Теорема 4. *Функция* $\ln(1+x)$ *является* $FP//LINSPACE$ *конструктивной на любом отрезке* $[2^{-p} - 1, 2^p - 2]$*, где* p *— натуральное,* $p \geq 1$*.*

Аналогичные теоремы доказываются для функций $(1 + x)^h$ (h— рациональное число, $|h| < 1$), $\sin(x)$, $\arcsin(x)$, $\exp(x)$.

Четвертая глава содержит описание библиотеки классов [12] для работы с $FLINSPACE$ конструктивными вещественными числами и функциями, реализованной на языке программирования `C# 1.1`. Приводятся результаты пробных вычислений некоторых констант и функций. Например, для вычисления приближенного значения $\ln(5)$ с 3320 двоичными знаками на компьютере с процессором AMD Athlon 64 X2 Dual Core 3800+ после точки понадобилось 27 с. При этом для умножения двоично-рациональных чисел использовался простой алгоритм с временной сложностью Cn^2.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы:

- Предложены алгоритмы для расчета в пределах $FP//LINSPACE$ полиномов и степенных рядов двух видов, в частности рядов Тейлора. Приведены условия на степенные ряды аналитических функций, при которых такие функции являются $FLINSPACE$ конструктивными.

- Доказана $FP//LINSPACE$ вычислимость наиболее часто используемых на практике классов вещественных чисел и функций: алгебраических чисел, некоторых трансцендентных чисел, основных элементарных функций (получены соответствующие оценки погрешностей вычислений двоично-рациональных приближений и на основе этих оценок построены алгоритмы класса $FP//LINSPACE$).

- Реализована библиотека классов на языке программирования `C#` в среде программирования `Microsoft Visual Studio 7.1` для работы с $FP//LINSPACE$ конструктивными числами и функциями и на примерах некоторых чисел и функций математического анализа продемонстрирована практическая пригодность данной библиотеки.

Предложенные алгоритмы не всегда оптимальны по времени выполнения, но для построения $FLINSPACE$ вычислимого математического анализа важна принципиальная возможность построения линейных по памяти алгоритмов.

Список литературы

[1] Косовская Т. М., Косовский Н. К. *Различия между классом $LINSPACE$ и рядом других классов сложности.* — Тезисы докладов XIV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Пенза, 23—28 мая 2005 г.). М.: Изд-во мех.-матем. факультета Моск. ун-та, 2005. — С. 72.

[2] Оревков В. П. *О сложности разложения алгебраических иррациональностей в непрерывные дроби.* — Труды Матем. ин-та им В. А. Стеклова, CXXIX. Л.: Наука, 1973. — С. 24—29.

[3] Шанин Н. А. *Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства.* — Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, Т. 67, изд. АН СССР, 1962. — С. 15—294.

[4] Du D., Ko K. *Theory of Computational Complexity.* — New York: John Wiley & Sons, 2000. — 491 p.

[5] Ko K. *Complexity Theory of Real Functions.* — Boston: Birkhauser, 1991. — 309 p.

[6] Ko K. *Polynomial-time computability in analysis.* — in «Handbook of Recursive Mathematics», Vol. 2, Recursive Algebra, Analysis and Combinatorics, 1998. — P. 1271—1317.

[7] Weihrauch K. *Computable analysis.* — New York: Springer, 2000. — 285 p.

Работы автора по теме диссертации

[8] Яхонтов С. В. *$LINSPACE$-конструктивность алгебраических чисел.* — Труды V Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Ратмино, 26—29 мая 2003 г.). М.: Изд-во факультета ВМиК Моск. ун-та, 2003. — С. 96—97.

[9] Яхонтов С. В. *Вычисление степенных рядов в пределах $LINSPACE$.* — Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2—6 февраля 2004 г.). М.: Изд-во мех.- матем. факультета Моск. ун-та, 2004. — С. 118—122.

[10] Яхонтов С. В. *Вычисление логарифмической функции в пределах $LINSPACE$ для конструктивных вещественных чисел.* — Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 18—23 июня 2007 г.). М.: Изд-во мех.- матем. факультета Моск. ун-та, 2007. — С. 149—151.

[11] Яхонтов С. В. *Вычисление алгебраических чисел и операции над ними с линейной памятью.* — Системы управления и информационные технологии. №1 (31), 2008 (март). — С. 97—102. — ISSN 1729-5068.

[12] Яхонтов С. В. *$LINSPACE$ конструктивный аналог логарифмической функции.* — Вестник С.-Петерб. ун-та, Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. Вып. 2, 2008 (июнь). — С. 97—110. — ISSN 1811-9905.