САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЯГУНОВ Сергей Алексеевич

Топологические методы в алгебраической геометрии: жесткость и двойственность

01.01.06 – математическая логика, алгебра
и теория чисел
01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Санкт-Петербург
2009

Работа выполнена в лаборатории алгебры и теории чисел
Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова
Российской Академии наук.

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, профессор
Вавилов Николай Александрович
(Санкт-Петербургский государственный университет)

доктор физ.-мат. наук Орлов Дмитрий Олегович
(Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)

член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук,
профессор Тайманов Искандер Асанович
(Новосибирский государственный университет)

Ведущая организация:

Российский государственный педагогический
университет им. А.И. Герцена

Защита состоится “____”____________ 2009 г. в ______ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., д.28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, СПб, Университетская наб., д.7/9.

Защита будет проходить в Петербургском отделении Математического института имени В.А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, 27, ауд. 311.

Автореферат разослан “____”____________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор В.М.Нежинский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Настоящая диссертация посвящена топологическим методам в алгебраической геометрии. Идея их использования для изучения комплексных алгебраических многообразий восходит к работам С. Лефшеца. В 1949м году А. Вейль сформулировал свои знаменитые гипотезы, касающиеся числа решений полиномиальных уравнений над конечными полями. В этих гипотезах содержалось предвидение обнаруженной впоследствии глубокой связи между арифметикой алгебраических многообразий над конечными полями и топологией комплексных алгебраических многообразий. В частности, Вейль отметил, что его гипотезы являются следствием существования некоторой приемлемой теории когомологий для абстрактных многообразий. Предвидение Вейля блестяще оправдалось, когда спустя годы необходимая теория когомологий была построена в работах А. Гротендика, М. Артина и П. Делиня.

В 50–70е годы было построено много когомологических инвариантов алгебраических многообразий и схем (например, этальные и кристаллические когомологии, алгебраическая K-теория). Когомологические методы стали мощным инструментом изучения алгебро-геометрических объектов, позволившим решить многие классические алгебро-геометрические проблемы. Однако вплоть до начала 90х годов построение теорий когомологий на категории алгебраических многообразий (или, более общó, схем), носило спорадический характер. На тот момент было чрезвычайно сложно изучать взаимосвязи между различными теориями. Более того, важнейшая теория мотивных когомологий, параллельная сингулярным когомологиям в классической топологии, вовсе не была построена. Причиной подобных проблем являлось, в частности, отсутствие в инструментарии алгебраической геометрии «машины», позволяющей создавать теории когомологий при помощи унифицированной процедуры. В классической топологии подобная трудность была преодолена много ранее, с появлением конструкции спектра.

Начало 90х годов было отмечено появлением диссертации В. Воеводского, в которой сформулированы основы построения функтора мотивных когомологий. В дальнейшее десятилетие, в результате его стратегического сотрудничества с А. Суслиным и Ф. Морелем, появляются работы, практически определяющие облик той части математики, которая называется сейчас $\mathbb{A}^1$-*гомотопической топологией*. Наиболее впечатляющим достижением развитой техники явилось доказательство Воеводским гипотезы Милнора.

Следует заметить, что к моменту появления вышеупомянутых работ Воеводского уже существовало несколько моделей, гипотетически вычисляющих мотивные когомологии в различных ситуациях. Впоследствии, одним из важных вопросов стало сравнение различных моделей. Изучение некоторых таких конструкций представляет существенный самостоятельный интерес и поныне, поскольку они связывают $\mathbb{A}^1$-гомотопическую топологию с другими разделами математики. Так, например, изучение комплексов, построенных по рациональным точкам грассмановых многообразий [7] играет важную роль в теории полилогарифмов, позволяет получить новые результаты в изучении гомологий линейных групп и классической алгебраической K-теории. В частности, становится понятной мотивная природа K-группы Милнора и группы Блоха — объектов, определенных исходно на языке «образующих и соотношений» [6].

Как это обычно и происходит, создание новой области математики, помимо решения старых вопросов, открывает новые горизонты исследований. Одним из таких возникающих направлений стала необходимость исследования феномена жесткости. Допуская некоторую вольность в изложении, можно сказать, что свойство жесткости состоит в том, что гомоморфизм специализации группы когомологий в рациональную точку гладкого неприводимого алгебраического многообразия не зависит от выбора точки. Жесткость в алгебраической геометрии является естественным «утончением» понятия гомотопической инвариантности. Интуитивно, соотношение между этими двумя понятиями соответствует соотношению между алгебраически эквивалентными и рационально эквивалентными циклами, но вместо циклов мы рассматриваем соответствующие группы когомологий слоев. Будучи переформулированными в контексте классической топологии эти два свойства, очевидно, становятся эквивалентными.

Феномен жесткости в том виде, в котором мы его и рассматриваем, впервые был изучен для K-функтора в работе Суслина [Su]. Необходимость исследования подобного свойства алгебраического K-функтора была вызвана подходом автора к гипотезе Лихтенбаума, дающей описание K-групп полей. Другим важным следствием жесткости является утверждение о поведении K-функтора для гензелизации алгебраического многообразия в рациональной точке. Этот результат был получен Суслиным (неопубликовано), а также независимо от него О. Габбером [Ga]. Аналогичное утверждение при немного других условиях доказывается в работе Жилле–Томасона [GT]. Рассмотрим алгебраическое многообразие X над некоторым полем k и обозначим через X_M^h гензелизацию этого многообразия в неособой k-точке M. Тогда для K-групп с конечными коэффициентами $\mathbb{Z}/p$, где $p > 1$ взаимно просто с экспоненциальной характеристикой основного поля, выполнено соотношение $K_i(k) \cong K_i(X_M^h)$. Интуитивно, переход к гензелизации в точке следует воспринимать как бесконечно малую деформацию многообразия в этой точке, а утверждение говорит нам, что K-функтор с конечными коэффициентами инвариантен относительно таких деформаций. Именно это следствие и дало название «жесткость» изучаемому явлению.

В дальнейшем, свойство жесткости для алгебраических многообразий возникает в более общем контексте в работе Суслина–Воеводского [SV], где авторы доказывают это свойство для когомологических функторов, снабженных трансферами (что в терминологии авторов означает: «для функторов на категории соответствий»). Эта работа еще раз подчеркнула стратегическую связь доказательства свойства жесткости и наличия некоторых трансферов в рассматриваемой теории когомологий.

В духе сформулированных выше общих принципов естественно возникает вопрос: для каких еще теорий когомологий на алгебраических многообразиях можно доказать аналог теоремы жесткости. Для этого мы изучаем возможности построения трансферов для различных теорий, что является основным техническим инструментом, используемым в диссертации, и чему в значительной своей части посвящена глава III.

В заключение обсуждения понятия жесткости, следует отметить недавний результат Остваера–Рёндингса [RØ] которые, используя методы, разработанные соискателем, произвели дальнейшее развитие понятия жесткости и перенесли его в контекст мотивов.

В последней главе диссертации исследована двойственность для ориентируемых теорий (ко)гомологий на алгебраических многообразиях. Двойственность Пуанкаре принадлежит к множеству классических топологических результатов. Теоремы двойственности в различных формах также относятся к числу ключевых фактов алгебраической геометрии. Так, например, двойственность для когомологий с коэффициентами в пучках играет важную роль в доказательстве гипотез Вейля. Сходные теоремы двойственности и тесно связанное с ними понятие фундаментального класса многообразия появляются в ставших классическими книгах Хартсхорна и Милна по алгебраической геометрии.

В контексте $\mathbb{A}^1$-гомотопической категории аналог теоремы двойственности играет важную роль в работе Воеводского–Фридландера [FV], где это утверждение доказывается для полей нулевой характеристики.

В настоящей работе мы доказываем теорему двойственности Пуанкаре для ориентируемых теорий (ко)гомологий на алгебраических многообразиях.

В последнем разделе мы формулируем и доказываем теорему двойственности для категории мотивов. Этот результат обобщает полученную ранее теорему двойственности и, в частности, дает новое, простое и независимое от предыдущего изложения, доказательство уже упоминавшейся выше теоремы двойственности Воеводского–Фридландера и ее обобщение на случай произвольной характеристики основного поля. В заключение заметим, что будучи примененной к классической топологической ситуации наша техника дает доказательство классической теоремы двойственности в духе категорного подхода Дольда–Пуппе [DP].

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. Основными целями настоящей работы являлись следующие. Получение аналогов известных результатов алгебраической топологии в контексте теорий когомологий на алгебраических многообразиях (схемах). Интерпретация результатов, полученных ранее для конкретных теорий когомологий (например, K-теории или этальных когомологий) как следствий более общих утверждений о T-спектрах и представимых ими теориях. Изучение возможных новых связей между «классическими» понятиями, глядя с «мотивной точки зрения».

ОБЩАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ. В диссертации используются методы гомологической алгебры и гомотопической топологии, $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии, теории операд и теории алгебраических групп.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Основными новыми результатами диссертации являются следующие:

- Построен трансфер (гомоморфизм переноса) для ориентируемых теорий когомологий на алгебраических многообразиях.
- Построен трансфер Беккера-Готтлиба для неориентируемых теорий когомологий на алгебраических многообразиях.
- Теорема жесткости для полей обобщена на все ориентируемые и представимые неориентируемые теории когомологий на алгебраических многообразиях.
- Теорема жесткости (и ее следствия) для K-теории гензелевых локальных колец обобщена на класс теорий когомологий включающий, в частности, все ориентируемые теории.
- Доказана теорема двойственности Пуанкаре для ориентируемых теорий когомологий на алгебраических многообразиях.
- Доказана общая теорема двойственности для мотивов, обобщена на случай произвольной характеристики основного поля теорема Воеводского–Фридландера.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в исследованиях по топологическим инвариантам алгебраических многообразий и схем, теории мотивов, алгебраической K-теории, теории квадратичных форм.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Основные результаты диссертации были представлены в докладах на международных конференциях: Motivic Homotopy Theory Workshop (Париж, Франция); Algebraic K-Theory, Linear Algebraic Groups and Related Structures (Билефельд, Германия); Algebraic Cobordism Arbeitsgemeinschaft (Обервольфах, Германия); неоднократно докладывались на семинаре лаборатории алгебры и теории чисел и общеинститутском семинаре ПОМИ РАН, алгебраическом семинаре им. Д.К.Фаддеева, алгебраическом семинаре И.Р.Шафаревича в МИ РАН, на топологических и алгебраических семинарах в университетах Dartmouth College (New Hampshire, США); Universitetet i Oslo (Осло, Норвегия); Universität Mainz (Майнц, Германия); Wilhelm Universität Münster (Мюнстер, Германия); Universität Bielefeld (Билефельд, Германия); Universität Essen (Эссен, Германия), Université Paris-XIII (Париж, Франция); на топологическом, теоретико-числовом и общеинститутском (Oberseminar) семинарах Математического Института Макса Планка (Max Plank Institut für Mathematik) (Бонн, Германия).

ПУБЛИКАЦИИ. По теме диссертации автором опубликовано восемь статей, из них семь — в российский журналах, рекомендованных ВАК, и зарубежных журналах, входящих в систему цитирования Web of Science: Science Citation Index Expanded. В статье [1] соавтору принадлежит только формулировка задачи. Результаты в статьях [2, 5] получены в нераздельном соавторстве; в статье [3] соавтору принадлежат результаты разделов 2 (описание теорий с конечными коэффициентами) и 4 (приложение полученных результатов к высшим группам Витта), остальные результаты статьи принадлежат диссертанту.

СТРУКТУРА и ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертация состоит из введения, 4-х глав, разбитых на 18 разделов, которые, в свою очередь, подразделяются на параграфы, двух приложений и списка цитированной литературы, что составляет 188 страниц. Библиография включает 95 источников.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается краткий исторический обзор топологических методов в алгебраической геометрии. Рассматриваются различные задачи, решенные с помощью методов $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии или лежащие в непосредственной близости от «сферы влияния» таких методов и подходов. Мы также делаем попытку сформулировать несколько классов естественных вопросов, касающихся взаимодействия $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии и уже известных свойств «классических» когомологических функторов (например таких, как K-функтор или функтор этальных когомологий).

Первая глава носит вспомогательных характер и не претендует на оригинальность. В ней мы приводим краткие, иногда упрощенные, определения некоторых важных объектов, необходимых нам в дальнейшем, таких например, как пространство Воеводского, $\mathbb{A}^1$-гомотопическая категория и T-спектр.

Во второй главе мы вводим аксиоматику теории когомологий на категории алгебраических многообразий $\mathbf{Sm/k}$.

Обозначим через $\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k}$ категорию, объектами которой являются пары (X, Y), где $X, Y \in \mathbf{Sm/k}$ и схема Y — локально-замкнутая подсхема в X. Морфизмами в этой категории будут обыкновенные морфизмы пар. Функтор $\mathcal{E}\colon X \mapsto (X, \emptyset)$ отождествляет $\mathbf{Sm/k}$ с полной подкатегорией в $\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k}$.

Определение II.1.4.[1] Мы называем гомотопически инвариантный функтор $\mathcal{E}\colon (\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k})^{\circ} \to \mathbf{Gr\text{-}Ab}$ (также как и его сужение на полную подкатегорию $\mathbf{Sm}/\mathbf{k}$) со значениями в категории градуированных абелевых групп *когомологической псевдо-теорией*, если он удовлетворяет следующим свойствам:

(II.1.4.1) **Изоморфизм надстройки.** Для схемы $X \in \mathbf{Sm}/\mathbf{k}$ и ее открытой подсхемы U положим: $W = X - U$. Тогда задан функториальный изоморфизм

$$\mathcal{E}_W(X) \overset{\Sigma}{\cong} \mathcal{E}^{[1]}_{W\times\{0\}}(X \times \mathbb{A}^1),$$

индуцированный морфизмом T-надстройки[2].

(II.1.4.2) **Вырезание в топологии Зарисского.** Пусть $X \overset{i}{\supseteq} X_0 \supseteq Z$ — схемы в $\mathbf{Sm}/\mathbf{k}$ такие, что X_0 открыто в X, а Z замкнуто в X. Тогда индуцированное отображение $i^*\colon \mathcal{E}_Z(X) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}_Z(X_0)$ является изоморфизмом.

(II.1.4.4) **Гомотопическая чистота.** Пусть $Z \subset Y \subset X \in \mathbf{Sm}/\mathbf{k}$ — замкнутое вложение гладких многообразий. Пусть также $\mathcal{N}$ обозначает соответствующее нормальное расслоение над Y, $i_0\colon \mathcal{N} \hookrightarrow B(X,Y)$ и $i_1\colon X \hookrightarrow B(X,Y)$ суть канонические вложения в пространство деформации к нормальному конусу над точками 0 и 1, соответственно. Тогда индуцированы изоморфизмы:

$$\mathcal{E}_Z(\mathcal{N}) \underset{\cong}{\overset{i_0^*}{\longleftarrow}} \mathcal{E}_{Z\times\mathbb{A}^1}(B(X,Y)) \underset{\cong}{\overset{i_1^*}{\longrightarrow}} \mathcal{E}_Z(X).$$

Определение II.1.5. Назовем функтор $E\colon \mathbf{Sm}/\mathbf{k} \to \mathbf{Gr\text{-}Ab}$ *когомологической псевдо-теорией,* если он допускает расширение на категорию пар посредством некоторой когомологической псевдо-теории $\mathcal{E}\colon \overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k} \to \mathbf{Gr\text{-}Ab}$.

---

[1] Здесь и далее подобная нумерация утверждений отсылает читателя к соответствующим утверждениям диссертации.

[2] Здесь и далее, если W замкнуто в X, мы будем часто записывать $\mathcal{E}^{*,*}(X, X - W)$ как $\mathcal{E}^{*,*}_W(X)$ и $\mathcal{E}^{*,*}(X, \emptyset)$ как $\mathcal{E}^{*,*}(X)$. Также заметим, что $\mathcal{E}^{[1]}$ обозначает соответствующий сдвиг бистепени.

Рассмотрим $\mathbf{Sm^2/k}$ — категорию пар (X, U), где $X \in \mathbf{Sm/k}$ и U — открыто в X. Обозначим через $R\colon \mathbf{Sm^2/k} \to \mathbf{Sm^2/k}$ функтор, действующий на объектах по правилу: $R(X, U) = (U, \emptyset)$, а на морфизмах — ограничением морфизма пар на вторую компоненту. Рассмотрим также градуированный функтор (семейство функторов) $E^{p,q}\colon (\mathbf{Sm^2/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ $(p, q \in \mathbb{Z})$, снабженный семейством естественных преобразований: $\partial^{p,q}\colon E^{p,q} \circ R \to E^{p+1,q}$ и удовлетворяющий следующей аксиоме.

Аксиома II.1.8. (Локализация) *Пусть* $(U, \emptyset) \xrightarrow{f} (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, U)$ — *морфизмы в* $\mathbf{Sm^2/k}$ *такие, что* j *индуцировано* $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X$. *Тогда следующая длинная последовательность точна:*

$$\cdots \xrightarrow{j^*} E^{*,*}(X) \xrightarrow{f^*} E^{*,*}(U) \xrightarrow{\partial^{*,*}} E^{*+1,*}(X, U) \xrightarrow{j^*} \cdots$$

Добавляя к приведенным выше аксиомам Вырезания, Гомотопической инвариантности и Гомотопической чистоты, аксиому Локализации мы получаем алгебро-геометрический аналог аксиом Стинрода–Эйленберга.

В большинстве случаев мы предполагаем наличие у нашей теории когомологий мультипликативной структуры.

Определение II.1.15. Мы будем называть гомотопически инвариантный функтор (семейство функторов) $E^{*,*}\colon (\mathbf{Sm^2/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$, удовлетворяющий аксиомам Локализации, Вырезания, Гомотопической Чистоты и обладающий мультипликативностью, теорией когомологий.

Наиболее важными для практики примерами теорий когомологий являются теории, представимые T-спектрами. Мы проверяем (см. II.3.2), что для всякой представимой теории выполнен наш набор аксиом.

Среди всех теорий когомологий можно выделить важный класс ориентируемых теорий, играющий ведущую роль в наших дальнейших построениях. Определением этого класса мы сейчас и займемся. Пусть дополнительно выполнены следующие аксиомы.

Аксиома II.1.16. (Первый класс Черна) *Для всякого линейного расслоения $\mathcal{L}$ над гладким многообразием X мы можем выбрать класс $c_1(\mathcal{L}) \in E^{2,1}(X)$ (называемый первым классом Черна расслоения $\mathcal{L}$), такой, что семейство $c_1(-)$ удовлетворяет следующим свойствам:*

a) Если $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$, то $c_1(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{L}')$;

b) Для морфизма $f\colon X \to Y$, мы имеем: $f^*(c_1(\mathcal{L})) = c_1(f^*(\mathcal{L}))$;

c) $c_1(\mathbf{1}) = 0$ (Мы обозначаем через $\mathbf{1}$ тривиальное линейное расслоение).

d) $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \neq 0$.

Следующее утверждение, как следует из названия, является скорее теоремой, чем аксиомой. Действительно, для функторов, представимых T-спектрами, данное утверждение следует из существования структуры Черна. Однако, поскольку мы *a priori* не предполагаем представимости, мы вынуждены добавить теорему о Проективизированном Расслоении в список аксиом.

Аксиома II.1.18. (Теорема о Проективизированном Расслоении) *Пусть $\mathcal{E}$ — векторное расслоение ранга r над X. Обозначим через $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{p} X$ проективизацию векторного расслоения $\mathcal{E}$ над X. (Слоем такого расслоения над точкой $\{x\}$ в X является проективное пространство прямых в слое $\mathcal{E}_x$.) Пусть также $\mathcal{O}(-1)$ — тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ и $\xi = c_1(\mathcal{O}(-1))$ — его первый класс Черна. Тогда кольцевой гомоморфизм $\varphi\colon E^{*,*}(X)[T]/(T^r) \to E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ такой, что $\varphi|_{E^{*,*}(X)} = p^*$ и $\varphi(T) = \xi$ является изоморфизмом градуированных $E^{*,*}(X)$-модулей. Другими словами, $E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ есть свободный $E^{*,*}(X)$-модуль с базисом $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{r-1}$. Более того, если расслоение $\mathcal{E}$ тривиально, отображение φ — кольцевой изоморфизм.*

Теорема о Проективизированнном Расслоении (ТПР) позволяет нам применить предложенный Гротендиком [Gr] подход к построению высших классов Черна.

Определение II.1.19. Мы называем коэффициенты $c_i(\mathcal{E}) \in E^{2i,i}(X)$ в соотношении

$$\xi^r - c_1(\mathcal{E})\xi^{r-1} + \cdots + (-1)^{r-1}c_{r-1}(\mathcal{E})\xi + (-1)^r c_r(\mathcal{E}) = 0$$

классами Черна векторного расслоения $\mathcal{E}$. В частности, последнее утверждение теоремы II.1.18 показывает, что все классы Черна тривиального векторного расслоения, кроме нулевого ($c_0 = 1$), принимают значение 0, как и следовало ожидать.

Из нашего определения легко следует функториальность классов Черна.

Определение II.1.21. Мы назовем теорию когомологий $E^{*,*}\colon (\mathbf{Sm^2/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$, удовлетворяющую аксиомам II.1.16 – II.1.18 *ориентируемым функтором (теорией)*. Соответствующее семейство называется *ориентированным*, если структура Черна зафиксирована. Мы также будем называть ориентируемой теорией сужение такого функтора на полную подкатегорию $\mathbf{Sm/k}$.

Мы используем классы Черна для построения функториального класса Тома векторного расслоения над алгебраическим многообразием. Для векторного расслоения $\mathcal{E}$ ранга r мы рассматриваем полином Черна, соответствующий тавтологическому линейному расслоению на проективизации $\mathbb{P}(\mathcal{E})$

$$c_t(\mathcal{E}) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} c_{r-k}(\mathcal{E}) t^k. \tag{1}$$

Подставляя в этот полином первый класс Черна тавтологического расслоения на $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathbf{1})$ мы получаем элемент в когомологиях $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathbf{1})$, обнуляющийся после ограничения на когомологии $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, т.е., актуально, элемент в $E_X^{*,*}(\mathcal{E})$ (см. II.2.2). Назовем последний элемент классом Тома $\mathrm{th}(\mathcal{E})$ векторного расслоения $\mathcal{E}$. Определенный так класс Тома функториален.

Предложение II.2.4. *Пусть $f\colon Y \to X$ — морфизм в категории* $\mathbf{Sm/k}$, *а $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на X. Тогда имеем:*

$$\mathrm{th}(f^*\mathcal{E}) = f^*(\mathrm{th}(\mathcal{E})).$$

В разделе II.6 мы рассматриваем различные теории когомологий и устанавливаем, в необходимых случаях, их ориентируемость. Раздел содержит как примеры «классических» теорий — этальные когомологии и K-теория, так и функторов, появившихся в последние годы – мотивные когомологии и алгебраические кобордизмы $\mathbf{MGL}$.

В третьей главе диссертации мы формулируем и доказываем результаты о жесткости для различных теорий когомологий. Здесь же получены и основные технические средства доказательства — построены отображения трансфера (гомоморфизмы переноса) как в случае ориентируемых теорий (с использованием построенного выше класса Тома), так и в неориентируемом случае (трансфер Беккера–Готтлиба.

Рассмотрим некоторую категорию схем (топологических пространств) $\mathcal{S}$ над связной базовой схемой (пространством) B вместе с некоторой теорией когомологий на этой категории $E^*\colon \mathcal{S}^\circ \to \mathbf{Ab}$. Тогда мы говорим, что теория E^* обладает *жесткостью*, если для всякой неприводимой схемы (линейно-связного пространства) $X \xrightarrow{\chi} B$ из $\mathcal{S}$ произвольные сечения $\sigma_0, \sigma_1\colon B \to X$ структурного морфизма χ индуцируют совпадающие гомоморфизмы $\sigma_0^* = \sigma_1^*\colon E^*(X) \to E^*(B)$.

В «классическом» контексте алгебраической топологии свойство жесткости является очевидным следствием гомотопической инвариантности функтора когомологий. Однако в алгебро-геометрическом случае $\mathbb{A}^1$-инвариантность, вообще говоря, не влечет жесткость. Феномен жесткости может быть установлен при некоторых дополнительных условиях (ориентируемость, условие нормализации, конечные коэффициенты), наложенных на теорию E^*, а также, возможно, после наложения некоторых условий на сечения (что имеет место, например, при рассмотрении жесткости для локальных гензелевых колец). На примере алгебраической K-теории несложно видеть, что уже функтор K_1 с целыми коэффициентами не обладает жесткостью, хотя K-функтор и является ориентируемой теорией когомологий на категории алгебраических многообразий. К примеру, из результатов Суслина [Su] следует (см. также теорему III.4.6, приведенную ниже), что выполнение условия жесткости влечет изоморфизм

$K_i(F) \cong K_i(G)$ для расширения алгебраически замкнутых полей $F \subset G$. Так как для всякого поля k верно, что: $K_1(k) = k^*$, мы получаем противоречие: $F = G$.

В то же время, как несложно видеть, жесткость является более «тонким» свойством, чем гомотопическая инвариантность. Именно, выполнена следующая лемма.

Лемма III.0.1. *Если функтор $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ удовлетворяет условию жесткости над базовым многообразием $Y = X \times \mathbb{A}^1$, то отображение проекции $p\colon Y \to X$ индуцирует изоморфизм $\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(Y)$.*

Таким образом, выполнение свойства жесткости для всех многообразий влечет гомотопическую инвариантность функтора $\mathcal{F}$.

Для доказательства теорем жесткости для различных классов теорий когомологий представляется удобным ввести некий специальный класс функторов, называемый нами *функторами со слабыми трансферами* и убедиться, что для таких функторов теорема жесткости верна. Впоследствии мы должны будем лишь проверять, является ли та или иная теория функтором со слабыми трансферами.

Именно, мы будем строить и изучать функторы когомологического типа, снабженные отображениями трансфера (т.е. отображениями, действующими в «неестественную» сторону) для некоторого фиксированного класса морфизмов $\mathfrak{C} \subset \mathbf{Mor}(\mathbf{Sm/k})$.

Ниже рассматриваются три варианта класса $\mathfrak{C}$: класс всех проективных морфизмов C_{proj}, класс конечных проективных морфизмов C_{pfin}, либо, наконец, играющий важную роль при рассмотрении неориентируемого случая, класс C_{triv}, который мы определим ниже. Мы также предполагаем, что морфизмы всех вышеупомянутых классов снабжены некоторой декомпозицией. Точнее, элементами класса C_{proj} (C_{pfin}) являются пары $f^\tau\colon X \to Y$, где проективный морфизм $f\colon X \to Y$ разложен в композицию $f\colon X \overset{\tau}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{p} Y$ с замкнутым вложением τ и проекцией p.

Определение III.1.1. Обозначим через C_{triv} класс оснащенных морфизмов (f, τ, Θ) где для f выбрано разложение $f\colon X \overset{\tau}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{A}^n \xrightarrow{p} Y$

такое, что τ — замкнутое вложение с тривиальным нормальным расслоением $\mathcal{N}_{Y\times\mathbb{A}^n/X}$, p — морфизм проекции, а $\Theta\colon \mathcal{N}_{Y\times\mathbb{A}^n/X} \cong X\times\mathbb{A}^N$ — тривиализация нормального расслоения.

Пусть $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ — контравариантный функтор. Предположим, что для всякого $\mathfrak{C}$-морфизма $f^\tau\colon X \to Y$ задано отображение $f^\tau_!\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ называемое *отображением трансфера*, такое, что семейство всех таких отображений удовлетворяем нижеприведенным свойствам.

Свойство III.1.4. (Трансверсальная замена базы) *Для любого $\mathfrak{C}$-морфизма $f\colon X\to Y$, снабженного разложением $X \overset{\tau}{\hookrightarrow} Y\times Z \to Y$ (здесь и далее $Z=\mathbb{P}^1$ или $\mathbb{A}^1$, в зависимости от того, какой класс $\mathfrak{C}$ рассматривается) и морфизма $g\colon Y'\to Y$ такого, что квадрат*

$$\begin{array}{ccc} X' = Y'\times_Y X & \overset{\tau'}{\hookrightarrow} & Y'\times Z \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g\times\mathrm{id}} \\ X & \overset{\tau}{\hookrightarrow} & Y\times Z \end{array}$$

трансверсален, диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X') & \xrightarrow{f'_!} & \mathcal{F}(Y') \\ {\scriptstyle g'^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g^*} \\ \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{f_!} & \mathcal{F}(Y) \end{array}$$

коммутативна.

Свойство III.1.5. (Финитная аддитивность) *Пусть $X = X_0\sqcup X_1 \in$ $\mathbf{Sm/k}$ — несвязное объединение подмногообразий X_0 и X_1, $e_m\colon X_m \hookrightarrow X$ $(m=0,1)$ суть соответствующие морфизмы вложения, а $(f\colon X\to Y,\tau,\Theta)\in\mathfrak{C}$ $(\operatorname{codim} f = d)$. Полагая $f_{m,!} = (f\circ e_m, \tau\circ e_m, \Theta|_{X_m})_!$, имеем:*

$$f_{0,!}e_0^* + f_{1,!}e_1^* = f_!.$$

Свойство III.1.6. (Нормализация) *Пусть $f=\mathrm{id}\colon\ \mathrm{pt}\to\mathrm{pt}$. Тогда для* *всякого разложения* $\mathrm{pt} \overset{\tau}{\hookrightarrow} Z \to \mathrm{pt}$ *и произвольно выбранной тривиализации* Θ *отображение* $(f,\tau,\Theta)_!\colon \mathcal{F}(\mathrm{pt}) \to \mathcal{F}(\mathrm{pt})$ *тождественно.*

Определение III.1.7. Функтор $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$, снабженный для некоего класса морфизмов $\mathfrak{C}$ семейством трансферов $\{f_!\}_{f\in\mathfrak{C}}$, удовлетворяющих условиям III.1.4-III.1.6, называется *функтором со слабыми трансферами* для этого класса.

Мы доказываем, что для всякого функтора со слабыми трансферами выполнена теорема жесткости.

Теорема III.4.5. (Теорема Жесткости) *Пусть* $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ *— гомотопически инвариантный функтор со слабыми трансферами для класса* $\mathfrak{C}$. *Предположим также, что поле* k *алгебраически замкнуто и* $n\mathcal{F} = 0$ *для некоторого натурального* n *взаимно-простого с* $\mathrm{Char}\, k$. *Тогда, для любого гладкого неприводимого многообразия* V *и двух произвольных* k*-рациональных точек* $v_1, v_2 \in V(k)$ *индуцированные отображения* $v_1^*, v_2^*\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(k)$ *совпадают.*

Используя практически те же рассуждения, что и в статье Суслина [Su], мы получаем следующее следствие, полезное для вычислений экстраординарных теорий когомологий для различных многообразий.

Теорема III.4.6. *(также III.4.7) Пусть* $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ *— гомотопически инвариантный функтор, для которого выполнена теорема жесткости. Тогда для расширения алгебраически замкнутых полей* $k \subset K$ *и всякого гладкого многообразия* $X \in \mathbf{Sm/k}$ *естественное отображение замены базы* $\pi^*\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X_K)$ *есть изоморфизм.*

Техническое «ядро» главы III представляют конструкции трансфера для различных классов функторов. Для ориентируемых теорий мы строим трансфер для класса $\mathfrak{C} = C_{\mathrm{proj}}$, используя определенный в главе II класс Тома. Разлагая проективный морфизм в композицию замкнутого вложения и проекции, определим сперва гомоморфизм Гизина для вложения (см. параграф III.2.i).

Пусть $\tau\colon X \hookrightarrow Y$ — замкнутое вложение коразмерности d гладких k-многообразий и пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{Y/X}$ — соответствующее нормальное расслоение.

Пусть $B = B(Y, X)$ обозначает деформацию X к нормальному конусу в Y (см. приложение A). Тогда можно показать, что:

$$E_X^{*,*}(\mathcal{N}) \underset{\simeq}{\xleftarrow{i_0^*}} E_{X\times\mathbb{A}^1}^{*,*}(B) \underset{\simeq}{\xrightarrow{i_1^*}} E_X^{*,*}(Y). \tag{2}$$

Напомним, что $\mathrm{th}(\mathcal{N}) \in E_X^{2d,d}(\mathcal{N})$ обозначает класс Тома нормального расслоения.

Конструкция–Определение III.2.2. Определим отображение Гизина $\tau_!$ как следующую цепочку отображений:

$$E^{*-2d,*-d}(X) \xrightarrow{\smile \mathrm{th}(\mathcal{N})} E_X^{*,*}(\mathcal{N}) \xrightarrow{i_1^*\circ(i_0^*)^{-1}} E_X^{*,*}(Y) \xrightarrow{j^*} E^{*,*}(Y),$$

где $j\colon (Y, \emptyset) \hookrightarrow (Y, Y - X)$ и $\smile \mathrm{th}(\mathcal{N})$ обозначает композицию канонического изоморфизма $(s^*)^{-1}\colon E^{*,*}(X) \xrightarrow{\simeq} E^{*,*}(\mathcal{N})$, индуцированного нулевым сечением расслоения $\mathcal{N}$ и умножения на класс Тома $\mathrm{th}(\mathcal{N})$.

Для отображения проекции $(Y \times \mathbb{P}^n) \to Y$ гомоморфизм трансфера можно задать как проекцию на прямое слагаемое $E^{*-2n,*-n}(Y)$ в группе $E^{*,*}(Y \times \mathbb{P}^n)$, существующее благодаря ТПР.

К сожалению, эта «наивная» конструкция дает, вообще говоря, нефункториальное итоговое отображение трансфера (за исключением случаев теорий с аддитивной формальной группой). Хотя этот дефект и не мешает нам в доказательстве теоремы жесткости, позже, при рассмотрении теоремы двойственности Пуанкаре нам понадобятся функториальные трансферы. «Правильная» конструкция, использующая формальный групповой закон, соответствующий рассматриваемой теории, была найдена в работе [Pa].

Оснастив нашу ориентируемую теорию трансферами описанным выше образом, несложно проверить, что в итоге мы получаем функтор со слабыми трансферами для класса C_{pfin} и даже C_{proj}. Случай неориентируемых теорий более деликатен. Как было показано в [Pa], наличие трансферов для всех проективных морфизмов влечет ориентируемость. Поэтому мы не можем рассчитывать на построение трансферов для таких больших классов морфизмов. Однако можно доказать следующую теорему.

Теорема III.3.1. *Всякая когомологическая псевдо-теория E, заданная на категории $\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k}$ пар многообразий над алгебраически замкнутым полем k, может быть оснащена трансферами для класса морфизмов C_{triv}, после чего она становится функтором со слабыми трансферами для этого класса.*

Прежде всего, построим трансферы с носителем для замкнутых вложений. Пусть $W \hookrightarrow X \overset{f}{\hookrightarrow} Y$ — замкнутые вложения такие, что $W, X, Y \in \mathbf{Sm/k}$ и $(f,\Theta) \in C_{\mathrm{triv}}$ коразмерности n. Определим отображение $(f,\Theta)^W_!\colon E_W(X) \to E^{[n]}_W(Y)$. Рассмотрим, во-первых, следующие изоморфизмы:

$$\varphi_W(\Theta)\colon E_W(X) \xrightarrow[\cong]{\Sigma^n} E^{[n]}_{W\times\{0\}}(X\times\mathbb{A}^n) \xrightarrow[\cong]{\Theta^*} E^{[n]}_W(\mathcal{N}_{Y/X}). \tag{3}$$

На следующем шаге мы пользуемся свойством гомотопической чистоты. Рассмотрим отображение:

$$\chi_W\colon E_W(\mathcal{N}_{Y/X}) \xrightarrow[\cong]{(i_0^*)^{-1}} E_{W\times\mathbb{A}^1}(B(Y,X)) \xrightarrow[\cong]{i_1^*} E_W(Y). \tag{4}$$

Определение III.3.2. Композицию построенных отображений:

$$(f,\Theta)^W_! = \chi_W\varphi_W(\Theta)\colon E_W(X) \to E^{[n]}_W(Y) \tag{5}$$

мы будем называть трансфером Беккера–Готтлиба для замкнутого вложения f с носителем W.

В случае $W = X$ мы будем опускать упоминание о носителе. Как легко видеть, заданный таким образом трансфер коммутирует с отображением расширения носителей.

Конструкция–Определение III.3.4. Пусть теперь $(f\colon X \to Y, \Theta) \in C_{\mathrm{triv}}$ — морфизм относительной размерности d, снабженный разложением $X \overset{\tau}{\hookrightarrow} Y\times\mathbb{A}^n \overset{p}{\to} Y$ с замкнутым вложением τ и проекцией p. Мы определяем трансфер Беккера-Готтлиба $(f,\tau,\Theta)_!$ следующим образом. Рассмотрим стандартное открытое вложение $\mathbb{A}^n \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ и обозначим дополнение к $\mathbb{A}^n$ через $\mathbb{P}_\infty$. Следующие морфизмы пар индуцированы стандартными вложениями:

$$(Y\times\mathbb{A}^n)_X \overset{j_X}{\hookrightarrow} (Y\times\mathbb{P}^n)_X \overset{\alpha}{\leftarrow} (Y\times\mathbb{P}^n, Y\times\mathbb{P}_\infty) \overset{\beta}{\to} (Y\times\mathbb{P}^n)_Y \overset{j_Y}{\hookleftarrow} (Y\times\mathbb{A}^n)_Y.$$

Поскольку морфизм β отождествляет $\mathbb{P}_\infty$ с выделенным (бесконечно-удаленным) сечением линейного расслоения $\mathbb{P}^n - \{0\}$ на $\mathbb{P}^{n-1}$, он индуцирует изоморфизм на группах когомологий

$$\beta^*\colon E_Y(Y\times\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} E(Y\times\mathbb{P}^n, Y\times\mathbb{P}_\infty).$$

Морфизм j_X индуцирует изоморфизм вырезания

$$j_X^*\colon E_X(Y\times\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} E_X(Y\times\mathbb{A}^n).$$

Определим отображение $(f,\Theta)_!$ как следующую композицию:

$$(6)\qquad E(X)\xrightarrow{(\tau,\Theta)_!}E_X^{[d+n]}(Y\times\mathbb{A}^n)\xrightarrow{j_Y^*(\beta^*)^{-1}\alpha^*(j_X^*)^{-1}}E_{Y\times\{0\}}^{[d+n]}(Y\times\mathbb{A}^n)\xrightarrow[\cong]{\Sigma^{-n}}E^{[d]}(Y),$$

где Σ^{-n} обозначает изоморфизм, обратный к n-кратной T-надстройке.

Остальная часть раздела III.3 посвящена проверке свойств функтора со слабыми трансферами.

Мы рассмотрели теоремы жесткости для многообразий над алгебраически замкнутыми полями и их применение к задаче вычисления когомологий алгебраически-замкнутого поля. Следующим по сложности этапом должен быть переход к рассмотрению локальных колец. В разделе III.5 мы доказываем, что для большого класса $\mathbb{A}^1$-представимых теорий, включающего, в частности, все ориентируемые теории, выполнены теоремы жесткости аналогичные доказанным Габбером [Ga], Жилле–Томассоном [GT] и Суслиным для K-теории.

Теорема III.5.3. *Пусть k — бесконечное поле и пусть R — гензелево локальное кольцо существенно гладкое над k с полем частных* $\mathrm{Frac}(R)=F$. *Предположим, что $E=E^{**}$ — контравариантный биградуированный функтор на категории* $\mathbf{Sm/k}$, *представимый в стабильной $\mathbb{A}^1$-гомотопической категории и удовлетворяющий условию $\ell E=0$ для некоторого $\ell\in\mathbb{N}$, обратимого в R. Предположим, более того, что E*

нормализован по отношению к полю F(см. определение III.5.8 ниже). Пусть $f\colon M \to \operatorname{Spec} R$ — гладкий аффинный морфизм (чистой) размерности d, $s_0, s_1\colon \operatorname{Spec} R \to M$ — два сечения морфизма f такие, что $s_0(P) = s_1(P)$ в замкнутой точке P аффинного спектра $\operatorname{Spec} R$. Тогда два отображения[3] $E(M) \xrightarrow{s_i^*} E(\operatorname{Spec} R)$ совпадают $(i = 0, 1)$.

Определение III.5.8. (Нормализация) Мы говорим, что псевдотеория $E\colon \mathbf{Sm/k} \to \mathbf{Ab}$ удовлетворяет условию *нормализации* для сепарабельного расширения полей K/k, если для всякого $\lambda \in K^*$ автоморфизм $\Sigma_T^{-1}\lambda^*\Sigma_T\colon E(K) \to E(K)$, индуцированный λ-гомотетией $\mathbb{A}^1_K$ является тождественным. Мы называем функтор E *нормализованным* по отношению к некоторому полю k, если он удовлетворяет условию нормализации для всякого конечного сепарабельного расширения этого поля.

Условие III.5.8 является ослаблением условия ориентируемости и используется для построения трансферов в случае неориентируемых теорий. В общем случае, существует следующий удобный критерий.

Лемма II.4.6. *Предположим, что отображение $i^*\colon E(\mathbb{P}^2_K) \to E(\mathbb{P}^1_K)$ индуцированное некоторым (а значит и любым) стандартным вложением $\mathbb{P}^1_K \hookrightarrow \mathbb{P}^2_K$ сюръективно. Тогда функтор E удовлетворяет условию нормализации для поля K.*

Пример 1. Всякая ориентируемая теория когомологий удовлетворяет условию нормализации над любым полем. Из ТПР имеем изоморфизм: $E(\mathbb{P}^n_K) \cong E(\operatorname{Spec} K)[x]/(x^{n+1})$. Применяя лемму II.4.6, получаем желаемое.

Пример 2. Рассмотрим сильную (аналитическую) топологию на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Действие, индуцированное умножением на -1 (то есть, действие матрицы $diag(-1, 1)$) на вещественной проективной прямой $\mathbb{RP}^1 = S^1$, очевидно, нетождественно в когомологиях $H^1(\mathbb{RP}^1, \mathbb{Z})$.

[3] Напомним, что здесь и далее мы предполагаем, что область определения теории E расширяется на про-объекты. В частности, полагаем: $E(\operatorname{Spec} R) := \varinjlim E(X_i)$, поскольку $\operatorname{Spec} R = \varprojlim X_i$, где $X_i \in \mathbf{Sm/k}$.

Следствие III.5.5. *Пусть* $X \in \mathbf{Sm/k}$, *где поле* k *такое же, как и выше,* V *— гладкое многообразие над* k, $P \in V(k)$, *и* $F = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}^h_{V,P})$. *Пусть также (как и в теореме III.5.3)* E *является представимой теорией когомологий такой, что* $\ell E = 0$ *для некоторого* $\ell \in \mathbb{N}$, *обратимого в* F. *Если отображение* $E(\mathbb{P}^2_{X_L}) \to E(\mathbb{P}^1_{X_L})$, *индуцированное одним из стандартных вложений* $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ *— эпиморфизм для всякого конечного сепарабельного расширения полей* L/F, *то отображение*

$$E(X \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}^h_{V,P}) \to E(X)$$

— изоморфизм. Если теория E *представима коммутативным кольцевым* T*-спектром, достаточно проверить условие эпиморфности для* $X = \mathrm{Spec}\,k$.

Методика доказательства теоремы III.5.3 состоит в сведении ее утверждения к некоторым формам теоремы жесткости над полями. Возникающая трудность, по сравнению с рассматривавшимся ранее случаем, заключается в том, что в качестве основного поля нам необходимо использовать поле частных локального гензелева кольца. Поскольку такое поле (за исключением тривиальных случаев) не является алгебраически замкнутым, это приводит к необходимости использования более сложных методов. В частности, оказывается важным рассмотрение условия нормализации. Техника доказательства III.5.3 отчасти опирается на идеи Габбера и Суслина, использованные ими в доказательстве теоремы жесткости для K-теории. Однако, более общая (и, соответственно, менее сильная) конструкция трансфера требует существенно более тонкой техники.

Поскольку условие нормализации выполнено для всех ориентируемых теорий, утверждение теоремы III.5.3 является для них доказанным. В неориентируемом случае мы можем привести в качестве примера группы Бальмера–Витта с индексами 1 и 2.

Замечание III.5.14. Утверждение теоремы о собственной замене базы, существенно используемое в доказательстве теоремы III.5.3 представляет, по сути, частный случай теоремы жесткости для этальных когомологий.

В последней главе диссертации мы доказываем теорему двойственности Пуанкаре для представимых ориентируемых теорий (ко)гомологий на категории алгебраических многообразий. Мы начинаем с определения фундаментального класса.

Определение IV.1.1. Пусть пара $(\mathcal{E}, \gamma)$ является ориентируемым симметрическим кольцевым T-спектром[4]. Тогда, для гладкого проективного многообразия X, снабженного структурным морфизмом $\pi\colon X \to \mathrm{pt}$, мы называем элемент $\pi^!(1) \in E_*(X)$ *фундаментальным классом* X и обозначаем его через $[X]$. Таким образом, фундаментальный класс принимает значение в ассоциированной со спектром $\mathcal{E}$ теории гомологий E_*. Использованная в данном определении конструкция трансфера для гомологий не рассматривается в диссертации, но строится аналогично когомологическому случаю (см. [Pi]). Здесь также неявно использована естественная двойственность нулевых групп гомологий и когомологий объекта pt. Определим отображения двойственности следующим образом:

$$\mathcal{D}^\bullet\colon E^*(X) \to E_*(X) \quad \text{как} \quad \mathcal{D}^\bullet(\alpha) = \alpha \frown [X] \tag{7}$$

и

$$\mathcal{D}_\bullet\colon E_*(X) \to E^*(X) \quad \text{как} \quad \mathcal{D}_\bullet(a) = \Delta_!(1)/a. \tag{8}$$

(Здесь Δ обозначает морфизм диагонали.) Все необходимые конструкции произведений приведены нами в разделе II.5 диссертации.

Теорема IV.1.3. (Двойственность Пуанкаре) *Пусть $(\mathcal{E}, \gamma)$ — ориентированный симметрический кольцевой T-спектр. Тогда, для произвольного проективного многообразия X отображения $\mathcal{D}^\bullet$ и $\mathcal{D}_\bullet$ являются взаимно обратными изоморфизмами.*

Пользуясь утверждением теоремы двойственности Пуанкаре, легко получить формулы для трансферов (гомоморфизмов следа), в том же виде, в котором они часто возникают в топологии.

[4] Этот результат может быть дословно переписан для ориентируемых теорий без предположения представимости.

Следствие IV.1.4. *Для проективных многообразий* $X, Y \in \mathbf{Sm/k}$ *и морфизма* $f\colon X \to Y$, *положим:*

$$f_! = \mathcal{D}^Y_\bullet f_* \mathcal{D}^\bullet_X \qquad \textit{и} \qquad f^! = \mathcal{D}^\bullet_X f^* \mathcal{D}^Y_\bullet,$$

где $\mathcal{D}_X$ *и* $\mathcal{D}_Y$ *обозначают определенные выше операторы двойственности для многообразий* X *и* Y.

Доказательства как теоремы, так и следствия, базируются на двух формулах проекции, связывающих трансферы для (ко)гомологий с различными произведениями.

Теорема IV.1.5. (Первая формула проекции) *Для* $X, Y \in \mathbf{Sm/k}$, *проективного морфизма* $f\colon Y \to X$, *произвольных элементов* $\alpha \in E^*(Y)$ *и* $a \in E_*(X)$, *в группе* $E_*(X)$ *выполнено соотношение:*

$$f_*(\alpha \frown f^!(a)) = f_!(\alpha) \frown a.$$

Теорема IV.1.7. (Вторая формула проекции) *Пусть, кроме того,* $W \in \mathbf{Sm/k}$, *а* $F = \mathrm{id} \times f$. *Тогда, для всяких* $\alpha \in E^*(W \times Y)$ *и* $a \in E_*(X)$, *имеем (в* $E^*(W)$*):*

$$\alpha / f^!(a) = F_!(\alpha)/a.$$

Доказательства обеих формул проекции достаточно единообразны, мы скажем лишь несколько слов о первой формуле.

Определим $\mathfrak{V}$ как класс проективных морфизмов $f\colon Y \to X$ в рассматриваемой категории, для которых в группе $E_*(X)$ для произвольных элементов $\alpha \in E^*(Y)$ и $a \in E_*(X)$ выполнено соотношение:

$$f_*(\alpha \frown f^!(a)) = f_!(\alpha) \frown a. \tag{9}$$

Очевидно, введенный класс замкнут относительно композиции.

Мы доказываем теорему IV.1.5 в несколько этапов, последовательно устанавливая, что следующие классы морфизмов лежат в классе $\mathfrak{V}$.

- Нулевые сечения линейных расслоений: $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{L})$;

- Замкнутые дивизориальные вложения $i\colon D \hookrightarrow X$;
- Нулевые сечения конечных сумм линейных расслоений:

$$s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n);$$

- Нулевые сечения произвольных векторных расслоений: $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{V})$;
- Замкнутые вложения $i\colon Y \hookrightarrow X$;
- Проекции $p\colon X \times \mathbb{P}^n \to X$;

Для доказательства нашего утверждения для произвольных векторных расслоений нам потребовалось сформулировать и доказать гомологическую форму принципа расщепления.

Несколько особняком стоит последний раздел четвертой главы IV.4, в котором мы приводим доказательство теоремы двойственности для категории мотивов. Этот раздел обязан своим появлением попытке написать независимое доказательство теоремы двойственности Воеводского–Фридландера [FV] для произвольной характеристики основного поля. Такая обобщенная теорема следует уже и из IV.1.3, но использование специфических полезных свойств категории мотивов позволяют нам получить простое доказательство. Философия доказательства восходит к идеям Дольда–Пуппе [DP] — их категорному подходу к феномену двойственности в топологии.

Здесь мы будем понимать под теорией мотивов ковариантный функтор $\mathbf{M}\colon \mathbf{Sm/k} \to \mathfrak{M}$ из категории гладких алгебраических многообразий над полем k в тензорную триангулированную категорию, переводящий произведение многообразий в тензорное произведение. Обозначим через $\mathbb{Z}$ объект $M(\mathrm{pt}) \in \mathbf{Ob}\ \mathfrak{M}$. Мы также предполагаем, что в категории $\mathfrak{M}$ зафиксирован обратимый объект $\mathbb{Z}(1)$, называемый объектом Тэйта. Будем обозначать произведения n сомножителей $\mathbb{Z}(1) \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}(1)$ через $\mathbb{Z}(n)$, а произведения вида $M \otimes \mathbb{Z}(n)$ — через $M(n)$.

Для многообразия X мы будем называть объект $M(X)$ категории $\mathfrak{M}$ *(ориентируемым) мотивом* X, а сам функтор $\mathbf{M}$ — *(ориентируемой) теорией мотивов на категории* $\mathbf{Sm/k}$, если выполнены нижеследующие аксиомы.

- **Аксиома сокращения.** Для всякого целого числа q и произвольных многообразий X и Y из $\mathbf{Sm/k}$ существует канонический изоморфизм
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(M(X), M(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(M(X)(q), M(Y)(q)).$$
- **Аксиома трансфера.** Для всякого проективного равноразмерностного морфизма $f\colon X \to Y$ коразмерности $d = \dim Y - \dim X$ задан морфизм мотивов
$$f^!\colon M(Y) \to M(X)(d)[2d]$$
функториальный относительно указанного класса морфизмов, то есть $f^!(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ и $(fg)^! = g^! f^!$.
- **Аксиома замены базы.** Для всякого трансверсального декартова квадрата:
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y, \end{tikzcd}$$
с проективными равноразмерностными морфизмами f и $\tilde{f}$, выполнено соотношение[5] : $\tilde{g}_* \tilde{f}^! = f^! g_*$ в категории $\mathfrak{M}$.
- **Аксиома согласованности.** Пусть $F\colon X \times Z \to Y \times Z$ обозначает морфизм $f \times \mathrm{id}$ для некоторого морфизма многообразий $f\colon X \to Y$, для которого определен трансфер и произвольного многообразия Z. Тогда в категории $\mathfrak{M}$ выполнено соотношение $F^! = f^! \otimes 1$.

Для заданной теории мотивов $\mathbf{M}$ определим группы гомологий и когомологий следующим образом. Положим:
$$\mathrm{HM}^{nm}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(M(X), \mathbb{Z}(m)[n])$$
$$\text{и} \quad \mathrm{HM}_{nm}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{Z}(m)[n], M(X)).$$

Наиболее важным для нас примером вышеприведенной конструкции являются мотивы Воеводского.

Пример IV.4.1. Положим $\mathfrak{M} = \mathbf{DM}^{-}(\mathbf{k})$ и функтор $\mathbf{M}$ совпадает

[5] Здесь и далее через g_* *et cetera* обозначается морфизм, полученный из индуцированного морфизма $M(g)$ в категории $\mathfrak{M}$ после применения необходимых операций сдвига и скручивания с объектом Тэйта.

с соответствующим функтором мотивов из [SV]. Тогда $\mathbf{M}$ оказывается функтором с трансферами для проективных морфизмов и выполнены соответствующие аксиомы. Проверка аксиомы сокращения в этом случае проделана в работе [Vo]. Конструкция трансфера и остальные аксиомы принадлежат к числу базисных свойств мотивов Воеводского (см. [SV, Раздел 4]).

Пример IV.4.2. Заменяя, в наших определениях, категорию $\mathbf{Sm/k}$ категорией гладких топологических многообразий и беря в качестве $\mathfrak{M}$ производную категорию категории $\mathbb{Z}/2$-модулей, мы получим, как можно показать, обычные группы сингулярных (ко)гомологий с $\mathbb{Z}/2$-коэффициентами. Для согласования индексов нам достаточно положить $M(i)[j] := M[j-i]$, где справа подразумевается обычный сдвиг в триангулированной категории, или просто переписать все наши выкладки с одним индексом. Класс проективных морфизмов в этом случае следует заменить собственными дифференцируемыми отображениями. Конструкция трансфера может быть найдена в любом учебнике по алгебраической топологии. Прямая проверка показывает, что все вышеприведенные аксиомы выполняются и в рассматриваемом случае. В результате, применяя теорему сформулированную ниже,мы получим доказательство классической теоремы двойственности Пуанкаре в духе работы Дольда–Пуппе [DP].

Теорема IV.4.3. *Для всякой ориентируемой теории мотивов* $\mathbf{M}$ *и многообразий* $X, Y \in \mathbf{Sm/k}$*, где* X *— проективное равноразмерностное, существует канонический изоморфизм абелевых групп:*

$$\mathrm{Hom}(M(Y)(i)[j], M(X)) \simeq \mathrm{Hom}(M(Y \times X), \mathbb{Z}(d-i)[2d-j]),$$

контравариантный по Y*. Здесь* d *— размерность* X*.* Как простое следствие нашей теоремы, полагая $Y = \mathrm{pt}$, мы получим следующий классический вариант двойственности Пуанкаре:

Следствие IV.4.4. *Для произвольного гладкого проективного равноразмерностного многообразия* X *размерности* d *существует канонический* *изоморфизм:*

$$\mathbb{HM}_{*,*}(X) \simeq \mathbb{HM}^{2d-*,d-*}(X).$$

Предположим, что рассматриваемая категория $\mathfrak{M}$ допускает внутренние $\underline{Hom}$-объекты.

Для многообразия X, удовлетворяющего условиям следствия IV.4.4 рассмотрим каноническое отображение — *мотивный кофундаментальный класс*:

$$M(X) \otimes M(X) {=\!=\!=} M(X \times X) \xrightarrow{\Delta^!} M(X)(d)[2d] \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z}(d)[2d].$$

Это отображение задает канонический морфизм двойственности: $M(X) \to \underline{Hom}(M(X), \mathbb{Z}(d)[2d])$. Выполнено следующее утверждение.

Следствие IV.4.5. *Пусть* $\mathbf{M}$ *— теория мотивов, рассмотренная в примере IV.4.1. Тогда, для всякого гладкого проективного равноразмерностного многообразия* X*, построенный морфизм двойственности:*

$$\psi\colon M(X) \to \underline{Hom}(M(X), \mathbb{Z}(d)[2d])$$

является изоморфизмом.

Полученные результаты, как и следовало ожидать, согласуются с утверждениями предыдущего раздела. В частности, уже описанным способом по заданной двойственности можно восстановить трансферы для теорий (ко)гомологий (см. IV.1.4).

Основные работы автора по теме диссертации

Публикации по списку ВАК

[1] И.А.Панин; С.А.Ягунов Двойственность для мотивов. *Алгебра и Анализ*, 21(2), (2009) стр.205-213,

[2] I.Panin; Yagunov S. T-spectra and Poincaré Duality. *Journal für die Reine und Angew. Math. (Crelle's Journal)*, vol. 617, (2008) pp. 193–213.

[3] Hornbostel J.; Yagunov S. Rigidity for Henselian local rings and $\mathbb{A}^1$-representable theories. *Math. Z.*, 255(2):437–449, 2007.

[4] Yagunov S. Rigidity. II. Non-orientable case. *Doc. Math.*, 9:29–40 (electronic), 2004.

[5] Panin I.; Yagunov S. Rigidity for orientable functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 172(1):49–77, 2002.

[6] Yagunov S. On the homology of GL_n and higher pre-Bloch groups. *Canad. J. Math.*, 52(6):1310–1338, 2000.

[7] Yagunov S. Homology of bi-Grassmannian complexes. *K-Theory*, 12(3):277–292, 1997.

Прочие публикации

[8] Yagunov S. Oriented cohomology theories over a field. *Arbeitsgemeinschaft mit aktuellem Thema: Algebraic cobordism. Oberwolfach Reports* 2, No. 2, Report 16, 889-892 (2005).

Литература

[DP] Дольд Д.; Пуппе А. Двойственность, след и трансфер. *Труды Мат. Инст. им Стеклова.*, 154:81–97, 1983.

[FV] Friedlander E.; Voevodsky V. Bivariant cycle cohomology. В книге Cycles, transfers, and motivic homology theories, volume 143 of Ann. of Math. Stud. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000. стр. 138–187.

[Ga] Gabber O. K-theory of Henselian local rings and Henselian pairs. In *Algebraic K-theory, commutative algebra, and algebraic geometry (Santa Margherita Ligure, 1989)*, volume 126 of *Contemp. Math.*, pages 59–70. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[GT] Gillet H.A.; Thomason R.W. The K-theory of strict Hensel local rings and a theorem of Suslin. In *Proceedings of the Luminy conference on algebraic K-theory (Luminy, 1983)*, volume 34, pages 241–254, 1984.

[Gr] Grothendieck A. La théorie des classes de Chern. *Bull. Soc. Math. France*, 86:137–154, 1958.

[Pa] Panin I. Push-forwards in oriented cohomology theories of algebraic varieties, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0619/` (препринт) 2003.

[Pi] Pimenov K.I. Traces in oriented homology theories II. `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0724/` (препринт) 2005.

[RØ] Röndigs O.; Østvær P.A. Rigidity in motivic homotopy theory. *Math. Ann.*, 341(3):651–675, 2008.

[Su] Suslin A. On the K-theory of algebraically closed fields. *Invent. Math.*, 73(2):241–245, 1983.

[SV] Suslin A.; Voevodsky V. Singular homology of abstract algebraic varieties. *Invent. Math.*, 123(1):61–94, 1996.

[Vo] Voevodsky V. Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic. *Int. Math. Res. Not.*, (7):351–355, 2002.