САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГОРМИН Анатолий Андреевич

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ФИНАНСОВЫХ МОДЕЛЯХ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

05.13.18 - Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009

Работа выполнена на кафедре статистического моделирования математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор ЕРМАКОВ Сергей Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
БЕЛОПОЛЬСКАЯ Яна Исаевна
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)

кандидат физико-математических наук, инженер
КУЧКОВА Ирина Николаевна
(Sun Microsystems)

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

Защита состоится "___"_________ 200__ г. в __ часов на заседании совета Д 212.232.51 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "___"_________ 200__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Даугавет И.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В численных приложениях финансовой математики, в частности, при вычислении цен опционов, все большее распространение получает метод Монте-Карло. В многомерных задачах, а также в случаях, когда рассматриваются сложные зависимости платежной функции опциона от траектории случайного процесса, метод Монте-Карло становится основным методом вычисления цен опционов.

Уменьшение дисперсии оценок метода Монте-Карло является важной задачей, так как позволяет повысить эффективность вычислений. Задача уменьшения дисперсии при оценивании одного опциона исследована многими авторами в различных моделях: например, в [1] рассматривалась диффузионная модель, в [2], [3] — модель со стохастической волатильностью. Авторы использовали методы существенной выборки и выделения главной части для уменьшения дисперсии оценки Монте-Карло цены опциона, ими также были получены оценки с минимальной дисперсией. Метод выделения главной части был использован в [4] и [5] для некоторых моделей с диффузией и скачками. Финансовые модели со скачками получили широкое распространение, так как они обеспечивают лучшее соответствие временным рядам цен и большую гибкость при решении задачи калибровки модели (см. [6]).

В диссертации решается общая задача уменьшения взвешенной дисперсии, когда на одной траектории моделируемого процесса оценивается некоторое множество опционов, зависящих от параметров. Такая задача актуальна в ряде приложений финансовой математики, например, в задаче калибровки модели, при оценивании рисков портфеля опционов (см. [7]).

Задача уменьшения взвешенной дисперсии в общем виде рассматривалась в монографии С.М. Ермакова [8], где приведено решение для случая существенной выборки, когда оцениваются интегралы от нескольких функций с общей областью определения. В диссертационной работе решается задача минимизации взвешенной дисперсии для диффузионной модели с локальной волатильностью и модели со стохастической волатильностью и скачками. Получены оценки Монте-Карло с минимальной взвешенной дисперсией цен опционов. Эти оценки аппроксимируются для различных опционов и применяются для эффективного вычисления их цен.

Цель работы. Целью работы является повышение эффективности оценок Монте-Карло стоимости опционов. С этой целью решаются следующие задачи:

1. Построение оценок Монте-Карло с минимальной взвешенной дисперсией цен опционов.

2. Аппроксимация оценок с минимальной взвешенной дисперсией для различных опционов и параметров взвешивания.

3. Разработка программ, эффективно вычисляющих цены опционов с помощью построенных оценок.

Общая методика работы. В работе используются методы и результаты теории случайных процессов, в том числе процессов с диффузией и скачками, теории дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, методы функционального анализа. Программирование осуществлялось в среде MS Visual C++.

Научная новизна. В данной работе впервые построены оценки Монте-Карло цен опционов с минимальной взвешенной дисперсией для диффузионной модели финансового рынка и модели со стохастической волатильностью и скачками. Показано, как эти оценки могут быть использованы для эффективного вычисления цен опционов.

Теоретическая и практическая ценность. Теоретическая ценность данной работы заключается в том, что оценки, минимизирующие взвешенную дисперсию, получены для широкого класса опционов. Показано, что в тех случаях, когда требуется высокая точность вычислений, полученные оценки, уменьшающие взвешенную дисперсию, более эффективны, чем стандартная оценка Монте-Карло. Написаны программы, в которых эффективно реализованы разработанные методы оценивания опционов. Подход к уменьшению взвешенной дисперсии, продемонстрированный для ряда опционов, может быть успешно использован для эффективного оценивания широкого класса опционов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре кафедры статистического моделирования математико-механического факультета СПбГУ, а также на конференциях

- FIE 08, The international school of Finance, Insurance, and Energy Markets - Sustainable Development, Vasteras, Sweeden, May 5 - 9, 2008;

- MCQMC 08, Eighth International Conference on Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing, Montreal, Canada, July 6 - 11, 2008;

- 6th St.Petersburg Workshop on Simulation, Saint-Petersburg, June 28 - July 4, 2009.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [11] – [14]. Статья [11] опубликована в журнале, входящем в перечень ВАК по специальности 05.13.18. В данной статье автору диссертации принадлежит метод уменьшения взвешенной дисперсии с помощью оценки с дополнительными весами, зависящими от параметра взвешивания и численные результаты. В статье [12] автору диссертации принадлежит доказательство теоремы 2.2, доказательство теоремы 2.3 было проведено совместно с соавтором, метод аппроксимации оценок, минимизирующих взвешенную дисперсию, и численные результаты моделирования. В статье [13] автору диссертации принадлежит обобщение результатов, полученных в [12], на случай многомерного параметра взвешивания, а также численные результаты моделирования; в статье [14] — новый метод минимизации взвешенной дисперсии за счет объединения методов существенной выборки и выделения главной части и численные результаты.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, приложения и списка литературы. Библиография содержит 38 наименований. Общий объем работы 132 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В основе опциона лежит базовый актив, цена которого описывается случайным процессом $(S_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, заданным на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$. Опцион имеет ряд параметров, таких как дата исполнения, страйк и др. Набор таких параметров обозначим через $k \in \mathbb{R}^n$. Платежное обязательство $f_k(S)$ опциона есть функционал, заданный на множестве траекторий процесса $(S_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$. Справедливая цена опциона представляется в виде $C_k = \mathbb{E}\tilde{f}_k(S)$ (см. [9], [10]), где $\mathbb{E}$ — математическое ожидание относительно мартингальной меры $\mathbb{P}$, $\tilde{f}_k(S) = R_T f_k(S)$ и $(R_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ — дисконтирующий процесс такой, что $(R_t S_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ является $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-мартингалом.

В диссертации рассматривается задача оценивания цен опционов C_k при различных значениях параметра $k \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$. С целью уменьшения взвешенной дисперсии

$$V = \int_\Theta \mathbb{D}\tilde{f}_k(S)\mathsf{Q}(dk),$$

где мера $\mathsf{Q}(dk)$ определяет требование к точности оценивания величин C_k, применяются методы существенной выборки и выделения главной части (см. [8]). Совместное их использование заключается в уменьшении взвешенной дисперсии V с помощью оценок среднего $C_k = \mathbb{E}\tilde{f}_k(S)$ вида

$$\widehat{C}_k(\rho,\eta) = \rho(\widehat{S})\tilde{f}_k(\widehat{S}) + \eta(\widehat{S}),$$

где $\widehat{S}_t$ — некоторый процесс, заданный на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, который описывается той же моделью, что и исходный процесс S_t; мера $\mathbb{Q}$ — абсолютно непрерывна относительно $\mathbb{P}$ и плотность $\rho(\widehat{S}) = d\mathbb{P}/d\mathbb{Q}$; η обладает тем свойством, что $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\eta(\widehat{S}) = 0$. Оценка $\widehat{C}_k(\rho,\eta)$ является несмещенной оценкой среднего C_k, то есть $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\widehat{C}_k(\rho,\eta) = \mathbb{E}\tilde{f}_k(S) = C_k$. Отметим, что случай $\widehat{S} = S$, $\rho = 1$, $\eta = 0$ соответствует иммитационному моделированию.

Общее время вычислений по методу Монте-Карло T_ε для получения точности ε может быть записано в виде:

$$T_\varepsilon = t_0 + c_\alpha \frac{D}{\varepsilon^2}(t_1 + t_2), \tag{1}$$

где t_0 — время, затраченное на предварительные вычисления, t_1 — время моделирования одной траектории, t_2 — время вычисления $\rho(\widehat{S})$, $\tilde{f}_k(\widehat{S})$ и $\eta(\widehat{S})$ на одной траектории процесса $\widehat{S}_t$, D — дисперсия оценки $\widehat{C}_k(\rho,\eta)$ и c_α — константа, зависящая только от уровня доверия α.

Поскольку $\widehat{S}_t$ и S_t описываются одной и той же моделью, то время на моделирование одной траектории этих процессов различается незначительно. Кроме того, временные затраты на вычисление $\rho(\widehat{S})$, $\eta(\widehat{S})$ можно сделать незначительными по сравнению с t_1 за счет предварительных вычислений. Таким образом, если требуется высокая точность, то, как видно из формулы (1), оценки с меньшей дисперсией будут более эффективны вне зависимости от того, сколько времени требуется на предварительные вычисления. При различных значениях параметра k из некоторого множества $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ оценки $\widehat{C}_k(\rho,\eta)$ строятся на одной траектории моделируемого процесса $\widehat{S}_t$. Поэтому при построении эффективных оценок средних C_k, где $k \in \Theta$, основной задачей является уменьшение взвешенной суммы дисперсий.

В диссертации рассматривается диффузионная модель с локальной волатильностью и модель со стохастической волатильностью и скачками. В этих моделях решается задача минимизации взвешенной дисперсии

$$\min_{\rho,\eta} \int_\Theta \mathbb{D}^{\mathbb{Q}}\widehat{C}_k(\rho,\eta)\mathsf{Q}(dk).$$

Мера $\mathsf{Q}(dk)$ определяет требование к точности оценивания величин C_k. Для удобства предполагается, что $\mathsf{Q}(\Theta) = 1$.

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, приводится обзор существующих результатов, сформулированы цели исследования, кратко изложены результаты. Методы существенной выборки и выделения главной части применяются здесь для минимизации взвешенной суммы дисперсий в общем случае, когда оцениваются несколько математических ожиданий вида $\mathbb{E}f_k(\xi)$, где функции $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. В таком виде задача минимизации взвешенной дисперсии рассматривается в монографии С.М. Ермакова [8] и решается с помощью метода существенной выборки.

В **первой главе** рассматривается диффузионной модель финансового рынка. В первом параграфе приводится ее описание. Пусть $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ — винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, и $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — естественная фильтрация процесса $(W_t)_{t\geqslant 0}$. Предполагается, что процесс $(S_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ является решением уравнения

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad S_0 = s_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Такая финансовая модель называется моделью с локальной волатильностью $\sigma(t, S_t)$.

Во втором параграфе задача минимизации взвешенной дисперсии решается в различных классах оценок. На платежное обязательство накладывается условие

$$0 \leqslant f_k(S) \leqslant c_1 \sup_{0\leqslant t\leqslant T} S_t + c_2, \quad \mathbb{P} - \text{п.н.}, \tag{2}$$

где c_1, c_2 — некоторые константы. Отметим, что платежные обязательства таких распространенных контрактов, как стандартные европейские опционы, азиатские и барьерные опционы европейского типа, удовлетворяют данному условию. В случае существенной выборки производится абсолютно-непрерывная замена меры $d\mathbb{P}^\upsilon = L_T^\upsilon d\mathbb{P}$, где процесс L_t^υ является решением уравнения

$$\frac{dL_t^\upsilon}{L_t^\upsilon} = -\upsilon_t dW_t, \quad L_0^\upsilon = 1.$$

Рассматриваются оценки математического ожидания $C_k = \mathbb{E}R_T f_k$ вида

$$\widehat{C}_k(\upsilon) = R_T f_k \rho_T^\upsilon,$$

где $\rho_T^\upsilon = (L_T^\upsilon)^{-1}$, $R_T = \exp(-\int_0^T r(t, S_t)dt)$ и для процесса υ_t выполнено условие Новикова:

$$\mathbb{E}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \upsilon_s^2 dt\right\} < \infty. \tag{3}$$

Обозначим через $\mathbb{D}^\upsilon$ и $\mathbb{E}^\upsilon$ дисперсию и математическое ожидание относительно меры $\mathbb{P}^\upsilon$. Так как $\mathbb{D}^\upsilon\widehat{C}_k(\upsilon) = \mathbb{E}^\upsilon\widehat{C}_k^2(\upsilon) - C_k^2$, то задача минимизации взвешенной дисперсии сводится к минимизации взвешенного второго момента

$$\min_{\upsilon} \int_{\Theta} \mathbb{E}^{\upsilon} \widehat{C}_k^2(\upsilon) \mathsf{Q}(dk). \tag{4}$$

Введем обозначение

$$\widehat{G} = R_T \left(\int_{\Theta} f_k^2 \mathsf{Q}(dk) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

тогда задача (4) сводится к минимизации второго момента функционала $\widehat{G}$. Определим мартингал $\hat{\mu}_t = \mathbb{E}(\widehat{G}|\mathcal{F}_t)$. Условие на платежное обязательство (2) обеспечивает квадратичную интегрируемость мартингала $\hat{\mu}_t$. Задача (4) решена в следующей теореме.

Теорема 1. *Существует $\mathcal{F}_t$-измеримый процесс $\hat{\alpha}_t$ такой, что выполняется $d\hat{\mu}_t = \hat{\alpha}_t dW_t$. Если*

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (\hat{\alpha}_t/\hat{\mu}_t)^2 dt \right\} < \infty,$$

тогда минимум (4) *равен*

$$\left(\mathbb{E}\widehat{G} \right)^2 \tag{6}$$

и достигается при

$$\upsilon_t = -\hat{\alpha}_t/\hat{\mu}_t.$$

В случае выделения главной части рассматриваются несмещенные оценки математического ожидания $C_k = \mathbb{E} R_T f_k$ вида

$$\bar{C}_k(z) = R_T f_k + \int_0^T z_s \, dW_s, \tag{7}$$

где $(z_s)_{0 \leqslant s \leqslant T}$ — $\mathcal{F}_t$-измеримый процесс такой, что $\mathbb{E} \int_0^T z_s^2 ds < \infty$. Пусть

$$\bar{G} = R_T \int_{\Theta} f_k \mathsf{Q}(dk), \quad \bar{\mu}_t = \mathbb{E}(\bar{G}|\mathcal{F}_t). \tag{8}$$

В классе оценок (7) минимизируется взвешенный второй момент

$$\min_{z} \int_{\Theta} \mathbb{E} \bar{C}_k^2(z) \mathsf{Q}(dk). \tag{9}$$

Теорема 2. *Минимум* (9) *равен*

$$\mathbb{E}\widehat{G}^2 - \mathbb{D}\bar{G} \tag{10}$$

и достигается при

$$z_t = -\bar{\alpha}_t,$$

где $\mathcal{F}_t$-измеримый процесс $\bar{\alpha}_t$ такой, что $d\bar{\mu}_t = \bar{\alpha}_t dW_t$.

В случае выделения главной части при фиксированном z рассматриваются также оценки $\mathbb{E}R_T f_k$ вида

$$\widetilde{C}_k(a) = R_T f_k + a(k)\int_0^T z_s\,dW_s,$$

где $k \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$, a — вещественная функция на множестве Θ. Показано, что при

$$a^*(k) = -\frac{\mathbb{E}\left(R_T f_k \int_0^T z_s\,dW_s\right)}{\mathbb{E}\int_0^T z_s^2 ds}$$

достигается минимум взвешенной дисперсии

$$\min_a \int_\Theta \mathbb{D}\widetilde{C}_k(a)\mathsf{Q}(dk) = \int_\Theta (1-\rho_k^2)\mathbb{D}(R_T f_k)\mathsf{Q}(dk),$$

где ρ_k — коэффициент корреляции между $R_T f_k$ и $\int_0^T z_s\,dW_s$.

Вообще говоря, минимумы (6), (10) различны и совпадают, когда мера Q сосредоточена в одной точке, то есть рассматривается один опцион. Далее рассматривается комбинация метода существенной выборки и метода выделения главной части. Пусть для $\mathcal{F}_t$-измеримого процесса $(\upsilon_s)_{0\leqslant s\leqslant T}$ выполнено условие (3), $\mathcal{F}_t$-измеримый процесс $(z_s)_{0\leqslant s\leqslant T}$ такой, что $\mathbb{E}\int_0^T z_s^2 ds < \infty$. Рассматривается оценка среднего $\mathbb{E}R_T f_k$ вида

$$\widetilde{C}_k(\upsilon, z) = R_T f_k \rho_T^\upsilon + \int_0^T z_s\,dW_s^\upsilon.$$

Так как $\widehat{G} \geqslant \bar{G}$, можем определить $\widetilde{G} = \sqrt{\widehat{G}^2 - \bar{G}^2}$ и $\tilde{\mu}_t = \mathbb{E}(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t)$.

Теорема 3. *Пусть $\bar{\mu}_t$, $\bar{\alpha}_t$ такие же, как в теореме 2, и $\mathcal{F}_t$-измеримый процесс $\tilde{\alpha}_t$ такой, что $d\tilde{\mu}_t = \tilde{\alpha}_t dW_t$. Минимум $\min\limits_{\upsilon,z}\int_\Theta \mathbb{E}^\upsilon \widetilde{C}_k^2(\upsilon,z)\mathsf{Q}(dk)$ равен*

$$(\mathbb{E}\widetilde{G})^2 + (\mathbb{E}\bar{G})^2$$

и достигается при

$$\upsilon_t = -\frac{\tilde{\alpha}_t}{\tilde{\mu}_t},\ z_t = -\rho_t^\upsilon(\bar{\alpha}_t + \upsilon_t\bar{\mu}_t),$$

если для υ выполнено условие (3).

Так же, как и для случая выделения главной части, рассматриваются оценки среднего $\mathbb{E}R_T f_k$ вида

$$\widetilde{C}_k(a) = R_T f_k \rho_T^\upsilon + a(k)\int_0^T z_s\,dW_s^\upsilon$$

и решается задача минимизации

$$\min_a \int_\Theta \mathbb{D}^v \widetilde{C}_k(a)\mathsf{Q}(dk).$$

Во **второй главе** рассматривается модель финансового рынка со стохастической волатильностью и скачками. В первом параграфе описывается сама модель. Рассматривается пуассоновский процесс $N_t = \sum_{n\geqslant 1} 1_{\{T_n \leqslant t\}}$ с постоянной интенсивностью λ, где T_1, $(T_{n+1}-T_n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение с параметром λ. Рассматривается последовательность независимых случайных величин $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ с распределением $m(dy)$ на измеримом пространстве $(E,\mathcal{E})$. Предполагается, что цена базового актива S_t удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}
S_t &= \int_0^t \mu(\tau, S_\tau)S_\tau d\tau + \int_0^t \sigma(\tau, V_\tau)S_\tau dW_\tau^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_t}\gamma(T_n, S_{T_n-}, Y_n)S_{T_n-}\\
V_t &= \int_0^t \eta(\tau, V_\tau)d\tau + \int_0^t \theta(\tau, V_\tau)dW'_\tau,\\
W'_t &= \rho W_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}W_t^{(2)},
\end{aligned}$$

где $\mu(t,S_t) = r(t,S_t) - \lambda\int_E \gamma(t, S_{t-}, y)m(dy)$, $|\rho| < 1$, и $W_t^{(i)}$ — i-ая компонента двумерного винеровского процесса W_t, независимого с последовательностью $(T_n, Y_n)_{n\geqslant 1}$. Пусть фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — естественная фильтрация, порожденная $(W_t)_{t\geqslant 0}$ и $(T_n, Y_n)_{n\geqslant 1}$. Обозначим через $p(dt,dy)$ считающую меру последовательности $(T_n, Y_n)_{n\geqslant 1}$, компенсатор меры $p(dt,dy)$ есть $\nu(dt,dy) = \lambda m(dy)dt$. Обозначим через $\tilde{p}(dt,dy)$ компенсированную меру $p(dt,dy)-\nu(dt,dy)$.

Во втором параграфе, также как и в главе 1, методы существенной выборки и выделения главной части применяются для минимизации взвешенной дисперсии оценки среднего. Предполагается, что платежное обязательство опционов удовлетворяет условию (2). Введем обозначения

$$\begin{aligned}
L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}^k) =& \{f : f(t,\omega) - \mathcal{F}_t\text{-измеримый}, \mathbb{E}\int_0^T ||f(t,\omega)||^2_{\mathbb{R}^k}dt < \infty\},\\
F^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}) =& \{f : f(t,y,\omega) - \mathcal{F}_t\text{-предсказуемый}, \mathbb{E}\int_0^T\int_E f^2(t,y,\omega)m(dy)dt < \infty\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай существенной выборки. Пусть $\upsilon_t = \upsilon(t,\omega) \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}^2)$, процесс $\kappa_t(y) = \kappa(t,y,\omega) \in F^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R})$ и для любого $t \in [0,T]$ выполнено условие

$$|\upsilon_t|^2 + \int_E \kappa_t^2(y)m(dy) \leqslant c(t) \quad \mathbb{P}-\text{п.н.}, \tag{11}$$

где $c(t) \geqslant 0$ — детерминированная функция такая, что $\int_0^T c(t)dt < \infty$. Обозначим через ϑ пару $\{\upsilon, \kappa\}$. Условие (11) позволяет сделать абсолютно-непрерывную замену меры $d\mathbb{P}^\vartheta = L_T^\vartheta d\mathbb{P}$, где процесс $(L_t^\vartheta)_{0\leqslant t\leqslant T}$ является решением уравнения

$$\frac{dL_t^\vartheta}{L_{t-}^\vartheta} = \upsilon_t dW_t + \int_E \kappa_t(y)\tilde{p}(dt, dy), \quad L_0^\vartheta = 1. \tag{12}$$

Относительно меры $\mathbb{P}^\vartheta$ процесс $W_t^\upsilon = W_t - \int_0^t \upsilon_s ds$ является винеровским процессом и компенсатор $p(dt, dy)$ есть $(1 + \kappa_t(y))\nu(dt, dy)$. Заметим, что если определить $\psi_t = \int_E \kappa_t(y)m(dy) + 1$ и $h_t(y) = (\kappa_t(y) + 1)/\psi_t$, тогда $p(dt, dy)$ имеет $(\mathbb{P}^\vartheta, \mathcal{F}_t)$-локальные характеристики $(\lambda\psi_t, h_t(y)m(dy))$: то есть, относительно новой меры $\mathbb{P}^\vartheta$ интенсивность равна $\lambda\psi_t$ и распределение скачков есть $h_t(y)m(dy)$. Обозначим через $\mathbb{E}^\vartheta$ математическое ожидание относительно $\mathbb{P}^\vartheta$. Определим $\rho_T^\vartheta = \left(L_T^\vartheta\right)^{-1}$и рассмотрим оценки среднего $C_k = \mathbb{E}R_T f_k$ вида

$$\widehat{C}_k(\vartheta) = R_T f_k \rho_T^\vartheta. \tag{13}$$

Рассмотрим мартингал $\hat{\mu}_t = \mathbb{E}(\widehat{G}|\mathcal{F}_t)$, где $\widehat{G}$ определен в (5). Условие на платежное обязательство (2) обеспечивает квадратичную интегрируемость мартингала $\hat{\mu}_t$. В диссертации доказана следующая теорема:

Теорема 4. *Существуют процессы $\hat{\alpha}_t \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}^2)$ и $\hat{\beta}_t(y) \in F^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R})$ такие, что*

$$d\hat{\mu}_t = \hat{\alpha}_t dW_t + \int_E \hat{\beta}_t(y)\tilde{p}(dt, dy).$$

Минимум $\min\limits_\vartheta \int_\Theta \mathbb{E}^\vartheta \widehat{C}_k^2(\vartheta)\mathsf{Q}(dk)$ равен $\left(\mathbb{E}\widehat{G}\right)^2$ и достигается при

$$\upsilon_t = \frac{\hat{\alpha}_t}{\hat{\mu}_t}, \quad \kappa_t(y) = \frac{\hat{\beta}_t(y)}{\hat{\mu}_{t-}},$$

если выполнено условие (11) для υ_t, $\kappa_t(y)$.

В случае выделения главной части рассматриваются оценки математического ожидания $C_k = \mathbb{E}R_T f_k$ вида

$$\bar{C}_k(\varphi) = R_T f_k + M_T^\varphi, \tag{14}$$

где $z_t \in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}^2)$, $\zeta_t(y) \in F^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R})$, $\varphi = \{z, \zeta\}$ и

$$M_t^\varphi = \int_0^t z_s dW_s + \int_0^t \int_E \zeta_s(y)\tilde{p}(ds, dy). \tag{15}$$

Функционал $\bar{G}$ и мартингал $\bar{\mu}_t$ определены в (8). В диссертационной работе доказана следующая теорема:

Теорема 5. *Минимум* $\min\limits_{\varphi}\int_{\Theta}\mathbb{E}\bar{C}_k^2(\varphi)\mathsf{Q}(dk)$ *равен* $\mathbb{E}\widehat{G}^2-\mathbb{D}(\bar{G})$ *и достигается при*

$$z_t=-\bar{\alpha}_t,\quad \zeta_t(y)=-\bar{\beta}_t(y),$$

где процессы $\bar{\alpha}_t\in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}^2)$ *и* $\bar{\beta}_t(y)\in F^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R})$ *такие, что*

$$d\bar{\mu}_t=\bar{\alpha}_t dW_t+\int_E\bar{\beta}_t(y)\tilde{p}(dt,dy).$$

Методы существенной выборки и выделения главной части используются также совместно. Оценки (13) и (14) объединены в оценку математического ожидания $C_k=\mathbb{E}R_Tf_k$ вида

$$\widetilde{C}_k(\vartheta,\varphi)=R_Tf_k\rho_T^{\vartheta}+M_T^{\vartheta,\varphi},\tag{16}$$

где $\vartheta=\{\upsilon,\kappa\}$, $\varphi=\{z,\zeta\}$ и мартингал

$$M_t^{\vartheta,\varphi}=\int_0^t z_s dW_s^{\upsilon}+\int_0^t\int_E\zeta_s(y)\tilde{p}(ds,dy)\tag{17}$$

квадратично интегрируемый относительно меры $\mathbb{P}^{\vartheta}$ и $\tilde{p}(ds,dy)=p(ds,dy)-(1+\kappa_t(y))\nu(dt,dy)$. Определим $\widetilde{G}=\sqrt{\widehat{G}^2-\bar{G}^2}$ и $\tilde{\mu}_t=\mathbb{E}(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t)$. Задача минимизации

$$\min_{\vartheta,\varphi}\int_{\Theta}\mathbb{E}^{\vartheta}\widetilde{C}_k^2(\vartheta,\varphi)\mathsf{Q}(dk)\tag{18}$$

решена в следующей теореме:

Теорема 6. *Пусть* $\bar{\mu}_t$, $\bar{\alpha}_t$, $\bar{\beta}_t(y)$ *такие же, как в теореме 5, и процессы* $\tilde{\alpha}_t\in L^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{\beta}_t(y)\in F^2_{\mathbb{F}}(\mathbb{R})$ *такие, что*

$$d\tilde{\mu}_t=\tilde{\alpha}_t dW_t+\int_E\tilde{\beta}_t(y)\tilde{p}(dt,dy).$$

Тогда минимум (18) *равен* $(\mathbb{E}\widetilde{G})^2+(\mathbb{E}\bar{G})^2$ *и достигается при*

$$\upsilon_t=\frac{\tilde{\alpha}_t}{\tilde{\mu}_t},\ \kappa_t(y)=\frac{\tilde{\beta}_t(y)}{\tilde{\mu}_{t-}},\ z_t=-\rho_t^{\vartheta}(\bar{\alpha}_t-\upsilon_t\bar{\mu}_t),$$
$$\zeta_t(y)=-\rho_{t-}^{\vartheta}\left(\bar{\beta}_t(y)-\bar{\mu}_t\frac{\kappa_t(y)}{1+\kappa_t(y)}\right),$$

если выполнено условие (11) *для* υ, κ.

Кроме того, также как и в главе 1 в оценки среднего C_k вида (14) и (16) добавляются дополнительные веса, зависящие от параметра взвешивания k и рассматриваются оценки вида:

$$\widetilde{C}_k(a;\varphi)=R_Tf_k+a(k)M_T^{\varphi},\quad \widetilde{C}_k(a;\vartheta,\varphi)=R_Tf_k\rho_T^{\vartheta}+a(k)M_T^{\vartheta,\varphi},$$

где M_T^{φ}, $M_T^{\vartheta,\varphi}$ определены в (15) и (17). Решаются следующие задачи минимизации:

$$\min_a \int_{\Theta} \mathbb{D}\widetilde{C}_k(a;\varphi)\mathsf{Q}(dk), \quad \min_a \int_{\Theta} \mathbb{D}^{\vartheta}\widetilde{C}_k(a;\vartheta,\varphi)\mathsf{Q}(dk).$$

В **третьей главе** рассматривается случай, когда дата исполнения опциона t включена в параметр взвешивания (k,t), который принимает значения из некоторого множества $\Theta = \mathcal{K}\times[0,T]$, где $\mathcal{K}\subset\mathbb{R}^n$. Предполагается, что платежная функция опционного контракта имеет вид $f_{k,t} = f_k(t,S_t)$, $\mathsf{Q}(dk,dt) = P(dk)Q(dt)$ на $\mathcal{K}\times[0,T]$, мера Q имеет ограниченную плотность $q(t)$.

В первом параграфе рассматривается диффузионная модель, описанная в главе 1. Для минимизации взвешенной дисперсии применяются две оценки математического ожидания $\mathbb{E}R_t f_{k,t}$:

$$\widehat{C}_{k,t}(\upsilon) = R_t f_{k,t}\rho_t^{\upsilon}, \tag{19}$$

где плотность $\rho_t^{\upsilon} = d\mathbb{P}/d\mathbb{P}^{\upsilon}$, $R_t = e^{-\int_0^t r(\tau,S_\tau)d\tau}$ и оценка

$$\widetilde{C}_{k,t}(\upsilon) = R_t f_{k,t}\rho_T^{\upsilon}.$$

Минимум взвешенной дисперсии для второй оценки получен с использованием теоремы 1. Минимум для первой оценки не превосходит минимума для второй оценки, но при этом требуется затратить существенно больше усилий для решения задачи минимизации. Сначала задача минимизации взвешенного второго момента

$$\min_{\upsilon}\int_0^T\int_{\mathcal{K}}\mathbb{E}^{\upsilon}\widehat{C}_{k,t}^2(\upsilon)P(dk)q(t)dt.$$

сводится к задаче

$$\min_{\upsilon} V^{\upsilon}(0,S_0), \tag{20}$$

где

$$V^{\upsilon}(t_0,x) = \mathbb{E}^{-\upsilon}\left(\int_{t_0}^T e^{\int_{t_0}^t(\upsilon^2(\tau,S_\tau)-2r(\tau,S_\tau))d\tau}h^2(t,S_t)q(t)dt\,\middle|\, S_{t_0}=x\right),$$

$h(t,x) = \left(\int_{\mathcal{K}} f_k^2(t,x)P(dk)\right)^{\frac{1}{2}}$. Выводится линейное дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа, которому удовлетворяет функция $V^{\upsilon}(t,x)$. Обозначим

$$LU(t,x) = \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)x^2\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} + r(t,x)x\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} - r(t,x)U(t,x),$$

$F(t,x) = h^2(t,x)q(t)$. В диссертационной работе получены условия на функции q, r, σ, f_k при которых справедлива следующая теорема:

Теорема 7. *Минимум* (20) *достигается при*

$$v^*(t,x) = -\sigma(t,x)x\frac{U'_x(t,x)}{U(t,x)}, \tag{21}$$

где U *удовлетворяет уравнению*

$$LU + \frac{F}{2U} = 0 \quad \textit{в}\ [0,T)\times\mathbb{R}^+$$

с нулевым финальным условием.

В параграфе 2 рассмотрена модель со стохастической волатильностью и скачками. Доказана **теорема 8**, аналогичная теореме 7. В этой теореме решается задача минимизации взвешенного второго момента оценок среднего $\mathbb{E}R_t f_{k,t}$ вида $\widehat{C}_{k,t}(\vartheta) = R_t f_{k,t}\rho_t^\vartheta$, где $\rho_t^\vartheta = \left(L_t^\vartheta\right)^{-1}$ и L_t^ϑ задано в (12). Решение задачи минимизации

$$\min_\vartheta \int_0^T \int_{\mathcal{K}} \mathbb{E}^\vartheta \widehat{C}^2_{k,t}(\vartheta)\mathsf{Q}(dk,dt)$$

приводит к решению некоторого нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных.

В **четвертой главе** результаты глав 1, 2 и 3 применяются к оцениванию различных опционов. В первом параграфе строятся аппроксимации оптимальных оценок стоимостей опционов, минимизирующих взвешенную дисперсию в рассматриваемых моделях для стандартных европейских опционных контрактов, когда параметрами взвешивания является цена исполнения (страйк) и дата исполнения. Для азиатских опционов европейского типа, платежное обязательство которых зависит от среднего значения цены базового актива, аппроксимации получены, когда параметром взвешивания является страйк. Платежное обязательство барьерных контрактов европейского типа зависит от достижения ценой базового актива некоторого барьера. Для таких опционов в качестве параметра взвешивания рассматривается страйк и барьер. В случае оценки (19) для аппроксимации оптимальной функции v^* в (21), решающей задачу минимизации (20), рассматривается некоторая последовательность функций $\{v_n\}_{n=0}^\infty$, $v_0 = 0$, которая при определенных условиях сходится к v^*. Показано, что последовательность функций $V^{v_n}(t,x)$ не возрастает и при этом $V^{v_0}(0,S_0)$ есть взвешенный второй момент оценки цены опциона $\mathbb{E}R_t f_{k,t}$ вида $\widehat{C}_{k,t} = R_t f_{k,t}$. При моделировании используется аппроксимация функции $v_1(t,x)$, которая приводит к существенному уменьшению взвешенной дисперсии.

Во втором параграфе показано, что в тех случаях, когда требуется высокая точность вычислений, построенные оценки более эффективны по сравнению со стандартной оценкой Монте-Карло. Для повышения эффективности полученные в параграфе 1 аппроксимации вычисляются на сетке и затем при моделировании используется их линейная интерполяция.

Общее время вычислений T_ε, где ε — точность оценивания, задается формулой (1). В качестве показателя эффективности используется отношение временных затрат на вычисления $R = T_\varepsilon^{(1)}/T_\varepsilon^{(0)}$, где $T_\varepsilon^{(0)}$ соответствует стандартной оценке Монте-Карло, а $T_\varepsilon^{(1)}$ — оценке $\widehat{C}_k^{(1)}$, которая используется для уменьшения дисперсии. Для стандартной оценки Монте-Карло предполагается, что предварительные вычисления не производятся, то есть $t_0^{(0)} = 0$, тогда получаем

$$R = \frac{t_0^{(1)}}{T_\varepsilon^{(0)}} + \frac{D^{(1)}}{D^{(0)}} \frac{t_1^{(1)} + t_2^{(1)}}{t_1^{(0)} + t_2^{(0)}},$$

где $t_1^{(i)}$ — время моделирования одной траектории для соответствующей оценки, $t_0^{(1)}$ — время, затраченное на предварительные вычисления для оценки $\widehat{C}_k^{(1)}$, $t_2^{(i)}$ — время вычисления соответствующей оценки на одной траектории, $D^{(i)}$ — дисперсии оценок. Ясно, что $t_0^{(1)}/T_\varepsilon^{(0)} \to 0$, при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, для построенных оценок $t_1^{(1)} + t_2^{(1)}$ возрастает незначительно по сравнению с $t_1^{(0)} + t_2^{(0)}$. Поэтому если требуется высокая точность вычислений, то оценки с меньшей дисперсией более эффективны вне зависимости от того, сколько времени требуется на предварительные вычисления.

В третьем параграфе приведены результаты моделирования, демонстрирующие эффективность построенных оценок.

В **приложении A** приводится список используемых обозначений.

В **приложениях B** и **C** производятся необходимые вычисления для расчетов барьерных опционов.

Список литературы

[1] Nigel J. Newton. Variance reduction for simulated diffusions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 54, №6 (1994), pp. 1780–1805.

[2] J.P. Fouque, C.H. Han. Variance reduction for Monte Carlo methods to evaluate option prices under multi-factor stochastic volatility models. *Quantitative Finance*, Vol. 4, №5 (2004), pp. 597–606.

[3] J.P. Fouque, T. Tullie. Variance reduction for Monte Carlo simulation in a stochastic volatiltiy environment. *Quantitative Finance*, Vol. 2 (2002), 24–30.

[4] C. Chiarella, C. Nikitopoulos, E. Schlogl. A control variate method for Monte Carlo simulations of Heath-Jarrow-Morton models with jumps. *Applied Mathematical Finance*, Vol. 14, №5 (2007), pp. 365–399.

[5] Z. Zhu, F. B. Hanson. A Monte-Carlo option-pricing algorithm for log-uniform jump-diffusion model. *Proceedings of Joint 44nd IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2005, pp. 5221–5226.

[6] P. Glasserman, N. Merener. Numerical solution of jump-diffusion LIBOR market models. *Finance and Stochastic*, Vol. 7, №1 (2003), pp. 1–27.

[7] S. Lindset, A-C. Lund. A Monte Carlo approach for the American put under stochastic interest rates. *Journal of Economics Dynamics and Control*, Vol. 31, №4 (2007), pp. 1081–1105.

[8] С. М. Ермаков. *Метод Монте-Карло и смежные вопросы.* Наука, Москва, 1975.

[9] J. M. Harrison, S. R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 11 (1981), pp. 215–260.

[10] J. M. Harrison, S. R. Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 15 (1983), pp. 313–316.

Список публикаций автора

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[11] А.А. Гормин, Ю.Н. Каштанов. Уменьшение дисперсии при оценивании опционных контрактов. *Вестник С.-Петербургского университета*, Издательство СПбГУ, серия 10, вып. 3, стр. 10–21, сентябрь 2009.

Остальные публикации:

[12] A. A. Gormin, Y. N. Kashtanov. The weighted variance minimization for options pricing. *Monte Carlo Methods and Applications*, Vol. 13, №5–6 (2007), pp. 333–351.

[13] A. A. Gormin., Y. N. Kashtanov. Variance reduction for multiple option parameters. *Journal of Numerical and Applied Mathematics (ISSN 0868-6912)*, Vol. 1, №96 (2008), pp. 96–104.

[14] A. A. Gormin. Importance sampling and control variates in the weighted variance minimization. *Proceedings of the 6th St.Petersburg Workshop on Simulation*, June 2009, pp. 109–113.