САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

БОГОЛЮБОВ

Андрей Александрович

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2009

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:
член-корреспондент Российской Академии наук,
доктор физико-математических наук, профессор
Плисс Виктор Александрович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Осипенко Георгий Сергеевич
(Санкт-Петербургский государственный Политехнический университет),
кандидат физико-математических наук, доцент
Иванов Борис Филиппович
(Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров).

Ведущая организация:
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ".

Защита состоится "____"___________ 2009 г. в ____ час. ____ мин. на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199478, Санкт-Петербург, 14 линия В.О., д. 29, ауд. ____.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9.
Автореферат разослан "____"___________ 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.49 А. А. Архипова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Изучение структуры множества траекторий в окрестности инвариантных поверхностей нелинейных систем дифференциальных уравнений является одной из актуальных задач качественной теории дифференциальных уравнений. В настоящей диссертации рассматривается существенно нелинейная квазипериодическая система. Системы такого вида были впервые рассмотрены в работах Лубиха [4], Монакова [5] и Ильина [1, 2] в связи с задачей о существовании инвариантных поверхностей и принципом сведения. В работе [1] в частности было доказано, что у квазипериодической системы определенного вида существует инвариантный тор, но детальный анализ поведения траекторий в окрестности тора не проводился и вопросы структурной устойчивости таких систем не рассматривались. Настоящая диссертация посвящена изучению этих вопросов. Проводится детальный анализ поведения траекторий в окрестности инвариантного тора, доказывается существование интегральных поверхностей определенного вида, которые образуют расслоение в окрестности тора, рассматривается вопрос о сохранении структуры множества траекторий в окрестности тора при малых возмущениях системы.

Следует отметить, что в современной литературе вопросы о поведении решений в окрестности инвариантного многообразия подробно изучены только для квазилинейного случая. Для существенно нелинейных систем, у которых линейное приближение тождественно равно нулю, стандартные методы поиска интегральных многообразий, использующие интегральные уравнения и функции Грина, оказываются непригодными, поэтому нужно использовать более геометрические методы. Такие операторно-геометрические методы, в основе которых основе лежит так называемый метод преобразования графика, разработаны в работах [7, 2, 4, 5]. Диссертация является продолжением исследований, начатых в вышеперечисленных работах.

Цель работы

Исследовать поведение решений в окрестности инвариантного тора существенно нелинейной квазипериодической системы. Построить инвариантное расслоение в окрестности данного инвариантного тора. Рассмотреть вопрос о сохранении структуры множества траекторий в окрестности тора при малых возмущениях системы.

Методы исследования

Для доказательства существования расслоения применяются метод логарифмических норм Лозинского, метод преобразования графика, техника вполне непрерывных операторов и техника, разработанная В.А. Плиссом [7] при доказательстве принципа сведения. Для доказательства существования локально-интегральных поверхностей в окрестности тора, применяются операторно-геометрические методы, ранее рассмотренные в работах [6, 2, 4, 5]. При доказательстве локальной топологической сопряженности используется классическая геометрическая идея, применяемая в линейном случае, и метод норм Лозинского.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Выделим основные из них.

1. Доказано существование неустойчивой локально-интегральной поверхности в окрестности нулевого решения нелинейной неавтономной системы специального вида, который ранее не рассматривался.

2. Доказано, что для любого решения на торе существует единственная локально-интегральная поверхность, содержащая это решение, такая, что любое решение на этой поверхности стремится к данному решению на торе

при $t \longrightarrow +\infty$.

3. Доказано, что поверхности, построенные для различных решений на торе, не пересекаются.

4. Доказано, что через любую точку, находящуюся в достаточно малой окрестности тора, проходит одна из таких локально-интегральных поверхностей.

5. Из пунктов 2,3,4 следует существование инвариантного расслоения в окрестности тора.

6. Доказано, что данная нелинейная система локально топологически сопряжена со своим возмущением в окрестности рассматриваемого инвариантного тора в случае, когда тор состоит из точек покоя.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Доказательство существования инвариантного расслоения в окрестности тора является важным шагом на пути изучения локальной структурной устойчивости системы в окрестности тора. Если при малом возмущении системы структура траекторий сильно меняется, то такая система не может являться моделью для реального процесса, т.к. при построении модели данные подбираются приближенно, поэтому изучение вопроса устойчивости структуры множества траекторий при возмущении системы имеет важную практическую ценность.

Апробация

Основные результаты были доложены на заседании Городского семинара по дифференциальным уравнениям (руководитель член-корреспондент РАН В.А. Плисс, Санкт-Петербург, 2008). Результаты диссертации опубликованы в статьях [8-10]. В работах [9, 10] Ю.А. Ильину принадлежит постановка задачи и общая идея метода решения; реализация метода проведена автором. Статья [8] опубликована в журнале, входящем в перечень

ВАК на момент публикации.

С т р у к т у р а и о б ъ е м р а б о т ы

Диссертация содержит 70 страниц машинописного текста и состоит из введения, двух глав, разделенных на 6 параграфов, и списка литературы из 38 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x) + Q(x,\varphi), \\ \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = a(x,\varphi), \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, вектор-функции P, Q и a непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, Q и a являются $2\pi-$ периодичными по φ_j, $j = 1, ..., m$, где $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$. Предполагается, что

$$P(0) = 0, \tag{2}$$

$$\gamma^*(P'_x(x)) \leq -\lambda ||x||^k, \tag{3}$$

$$||Q'_{x,\varphi}(x,\varphi)|| \leq l||x||^{k+1}, \tag{4}$$

$$||a'_{x,\varphi}(x,\varphi)|| \leq l||x||^{k+1}, \tag{5}$$

где $\lambda > 0$, $l \geq 0$, $k \geq 0$, $||x||$ и $||\varphi||$ - произвольные нормы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, $||(x,\varphi)|| \stackrel{def}{=} \max(||x||, ||\varphi||)$, матричные нормы понимаются как операторные.Через $\gamma^*(A)$ для $(n \times n)$ матрицы A обозначается верхняя норма Лозинского (см. [3]), то есть

$$\gamma^*(A) = \lim_{h \to +0} \frac{(\|E + hA\| - 1)}{h},$$

где E — единичная матрица.

При вышеперечисленных предположениях в работе [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнено неравенство $2l < \lambda$, то система (1) имеет единственный инвариантный тор, представимый в виде*

$$x = u(\varphi),$$

где функция $u(\varphi)$ является $2\pi-$периодической по φ_j и удовлетворяет неравенству

$$||u(\varphi_1) - u(\varphi_2)|| \leq L^*||\varphi_1 - \varphi_2|| \tag{6}$$

с константой $L^* = \dfrac{2l}{\lambda - l}$. Этот тор устойчив в том смысле, что всякое решение начинающееся в некоторой его окрестности, стремится к нему при $t \to +\infty$.

Обозначим через

$$d = \min_{||s_1||=1, ||s_2||\leq 1} \int\limits_0^1 ||s_1\theta + s_2(1-\theta)||^k d\theta.$$

В диссертации дополнительно предполагается, что система (1) удовлетворяет следующему условию.

Условие А. *Пусть $z_i(t) = (x_i(t), \varphi_i(t))$ - два решения системы (1) такие, что $||x_i(t_0)|| \leq \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 < \dfrac{\lambda d(k+1)}{2l}$. Существует такая функция $\alpha(t)$, не зависящая ни от t_0, ни от $x_i(t_0)$, что*

$$||a(x_1(t), \varphi_1(t)) - a(x_2(t), \varphi_2(t))|| \leq \alpha(t)||\Delta z(t)|| \tag{7}$$

для тех $t \geq t_0$, при которых $||x_i(t)|| \leq \varepsilon_0$, где $\Delta z(t) = z_1(t) - z_2(t)$, $||\Delta z|| = \max\{||\Delta x||, ||\Delta\varphi||\}$; причем

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \alpha(t)dt \leq C_\alpha < \infty.$$

В главе 1 показано, что условие А выполняется при $Q(0, \varphi) = 0$.

В главе 1 доказывается, что при условии А в окрестности данного инвариантного тора существует инвариантное расслоение, то есть верны следующие три утверждения:

Утверждение 1. *Для любого решения на торе $x = u(\varphi)$ существует единственная локально-интегральная поверхность, содержащая это решение, такая, что любое решение на этой поверхности стремится к данному решению на торе при $t \longrightarrow +\infty$.*

Утверждение 2. *Поверхности, построенные для различных решений на торе, не пересекаются.*

Утверждение 3. *Через любую точку, находящуюся в достаточно малой окрестности тора, проходит одна из локально-интегральных поверхностей, описанных в утверждении 1.*

Замечание 1. *Из периодичности и непрерывности Q следует, что существует число $M > 0$ такое, что*

$$||Q(0,\varphi)|| \leq M. \tag{8}$$

В параграфе 3 главы 1 доказывается следующая теорема о существовании локально-интегральной поверхности из утверждения 1.

Теорема 2. *Пусть для системы (1) выполняются все условия теоремы 1 и условие А. Тогда при достаточно малом M и $\varepsilon_0 < \dfrac{\lambda d(k+1)}{2l}$ для любого решения $z_0(t) = (u(\varphi_0(t)), \varphi_0(t))$ на торе $x = u(\varphi)$ существует единственная локально-интегральная поверхность T_{z_0}, задаваемая уравнением*

$$\varphi = h_{z_0}(x,t), \tag{9}$$

где $h_{z_0} : \{(x,t) : ||x|| \leq \varepsilon_0, t \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^m$ есть непрерывная по своим аргументам вектор-функция такая, что для любого $t \in \mathbb{R}$ и всех x_1 и x_2 из области определения h выполняются соотношения

$$h_{z_0}(u(\varphi_0(t)),t) = \varphi_0(t), \qquad ||h_{z_0}(x_1,t) - h_{z_0}(x_2,t)|| \leq ||x_1 - x_2||.$$

Более того для любого $L \in (0,1]$ можно указать такие $M = M(L)$ и

$\varepsilon(L) > 0$, что если $||Q(0,\varphi)|| \le M(L)$ и $||x_1||, ||x_2|| \le \varepsilon(L)$, то

$$||h_{z_0}(x_1,t) - h_{z_0}(x_2,t)|| \le L||x_1 - x_2||.$$

Любое решение $z(t)$, начинающееся на этой поверхности стремится к решению $z_0(t)$ при $t \longrightarrow +\infty$ так, что справедлива оценка

$$||z(t) - z_0(t)|| \le$$
$$\le ||z(t_0) - z_0(t_0)|| \left[1 + \frac{k}{2^k}\left(\lambda d - \frac{l\varepsilon_0}{k+1}\right)||z(t_0) - z_0(t_0)||^k (t - t_0)\right]^{-\frac{1}{k}}, \quad t \ge t_0.$$

Для того, чтобы доказать существование локально-интегральной поверхности для решения $z_0(t) = (u(\varphi_0(t)), \varphi_0(t))$ на торе $x = u(\varphi)$, достаточно доказать существование поверхности для нулевого решения системы, полученной из исходной заменой переменных

$$y(t) = x(t) - u(\varphi_0(t)),\ \psi(t) = \varphi(t) - \varphi_0(t),\ \tau = -t, \tag{10}$$

переводящей рассматриваемое решение на торе в нулевое. Следовательно, задача сводится к поиску локально-интегральной поверхности для нулевого решения неавтономной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\tau} = -\left(\displaystyle\int_0^1 P'_y(u(\varphi_0(-\tau)) + \theta y)d\theta\right) y - H(y,\psi), \\ \\ \dfrac{d\psi}{d\tau} = -b(y,\psi), \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} &H(y,\psi) = Q(y + u(\varphi_0), \psi + \varphi_0) - Q(u(\varphi_0), \varphi_0), \\ &b(y,\psi) = a(y + u(\varphi_0), \psi + \varphi_0) - a(u(\varphi_0), \varphi_0). \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, для доказательства теоремы 2 достаточно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *При достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$ система (11) имеет единственную локально-интегральную поверхность, представимую в виде*

$$\psi = h(y,\tau), \tag{13}$$

где $h : \{(y,\tau) : ||y|| \le \varepsilon_1, \tau \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *есть непрерывная по своим аргументам вектор-функция такая, что для любого* $\tau \in \mathbb{R}$ *и всех* y_1 *и* y_2 *из области определения* h *выполняются соотношения*

$$h(0,\tau) = 0, \tag{14}$$

$$||h(y_1,\tau) - h(y_2,\tau)|| \le ||y_1 - y_2||. \tag{15}$$

Более того для любого $L \in (0,1]$ *можно указать такое* $\varepsilon(L) > 0$ *и* $M(L)$, *что если* $||Q(0,\varphi)|| \le M(L)$ *и* $||y_1||, ||y_2|| \le \varepsilon(L)$, *то*

$$||h(y_1,\tau) - h(y_2,\tau)|| \le L||y_1 - y_2||. \tag{16}$$

Любое решение $z(\tau) = (y(\tau), \psi(\tau))$ *системы (11), расположенное на* h, *при* $\tau \to -\infty$ *стремится к началу координат так, что справедлива оценка*

$$||z(\tau)|| \le ||z(\tau_0)|| \Big[1 - \frac{k}{2^k}\Big(\lambda d - \frac{l\varepsilon_0}{k+1}\Big)||z(\tau_0)||^k(\tau - \tau_0)\Big]^{-\frac{1}{k}}, \quad \tau \le \tau_0, \tag{17}$$

где $||z(t)|| = \max(||y(\tau)||, ||\psi(\tau)||)$.

При доказательстве этой теоремы была использована техника, ранее примененная в работе [2].

В параграфе 4 главы 1 доказывается, что поверхности, построенные для двух различных решений на торе, не пересекаются.

Теорема 4. *Пусть* $z_1(t) = (u(\varphi_1(t)), \varphi_1(t))$ *и* $z_2(t) = (u(\varphi_2(t)), \varphi_2(t))$ *- различные решения системы (1) на торе* $x = u(\varphi)$. *Тогда поверхности* T_{z_1} *и* T_{z_2}, *построенные для решений* $z_1(t)$ *и* $z_2(t)$ *соответственно, не пересекаются.*

В этом же параграфе доказывается, что через каждую точку в достаточно малой окрестности тора проходит одна из локально-интегральных поверхностей, удовлетворяющих условиям теоремы 2.

Теорема 5. *При достаточно малых M и ε для любой точки z_0, находящейся в ε-окрестности тора, существует такая поверхность T_{z_0} из теоремы 2, что решение $z(t) = z(t, t_0, z_0)$ лежит на поверхности T_{z_0}.*

Таким образом, окрестность тора целиком заполнена непересекающимися поверхностями, причем для каждого решения на торе такая поверхность единственна.

В главе 2 относительно правых частей системы (1) помимо условий (2), (3), (4), (5) дополнительно предполагается, что

$$a(0, \varphi) = 0, \tag{18}$$

$$Q(0, \varphi) = 0. \tag{19}$$

В главе 2 доказывается, что при выполнении данных условий система (1) локально топологически сопряжена с системой

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x), \\ \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Пусть $z = (x, \varphi)$. В силу условий (18), (19) поверхность

$$\mathbb{T} = \{z : x = 0, \quad \varphi \in \mathbb{R}^m\} \tag{21}$$

состоит из точек покоя системы (1) и (20) и, следовательно, является инвариантной для этих систем. Причем на $\mathbb{T}$ эти системы совпадают.

Рассмотрим множество

$$H(\varepsilon) = \{z : ||x|| \le \varepsilon, \quad \varphi \in \mathbb{R}^m\}. \tag{22}$$

Пусть f^t - поток системы (1), g^t - поток системы (20).
В главе 2 доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Существует достаточно малое* ε_0 *такое, что при вышеперечисленных условиях существует гомеоморфизм* $h : H(\varepsilon_0) \to H(\varepsilon_0)$ *такой, что*

$$h(f^t z) = g^t h(z) \quad \forall z \in H(\varepsilon_0),$$

причем

$$h(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{T}.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю В.А. Плиссу и доценту Ю.А. Ильину за постановку задачи и полезные советы по ее выполнению.

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волков Д. Ю. , Ильин Ю. А.* О существовании инвариантного тора у существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 4 (N22). С. 27-31.

2. *Ильин Ю. А.* Существование интегральных многообразий в окрестности точки покоя существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений. Диссертация на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. н. Ленинград. 1989.

3. *Лозинский С. М.* Оценки погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 1958. № 5. С. 52-89.

4. *Лубих В. Л.* Существование локально-инвариантной поверхности при отсутствии линейного приближения // Диффернециальные уравнения. 1971. Т. 8, № 8.

5. *Монаков В. Н.* Аналог теоремы Ляпунова-Перрона для сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1972. Т 3. № II.

6. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 6. С. 1297-1324.

7. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. Москва. 1977.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

8. *Боголюбов А. А.* О локальной топологической сопряженности существенно нелинейных систем в окрестности инвариантных поверхностей, состоящих из точек покоя // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 1. С. 34-42.

9. *Боголюбов А. А., Ильин Ю. А.* Существование расслоения в окрестности инвариантного тора одной существенно нелинейной системы // Дифференциальные уравнения и процессы управления 2008. № 2. С. 19 - 38.

10. *Боголюбов А. А., Ильин Ю. А.* Существование слоения в окрестности инвариантного тора для существенно нелинейной системы // Нелинейные динамические системы. Вып. 5. СПб.: Изд. С.-Петерб. ун-та, 2003. С. 5-20.