САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Зимин Александр Владимирович

# О ВСПЛЕСКОВЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВ СПЛАЙНОВ

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2008 г.

Работа выполнена на Кафедре параллельных алгоритмов
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доктор физико-математических наук, профессор
*Демьянович Юрий Казимирович*

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

доктор физико-математических наук, профессор
*Вагер Борис Георгиевич*

доктор физико-математических наук, профессор
*Славянов Сергей Юрьевич*

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Научно-исследовательский вычислительный центр Московского
государственного университета им. М. В. Ломоносова (НИВЦ МГУ)

Защита состоится 2 октября 2008 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан “......” .................... 2008 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета, профессор А. А. Архипова

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы**. Теория всплесков (вэйвлетов) появилась полтора десятилетия назад и интенсивно развивается. Большой вклад в развитие этой теории внесли учёные: И. Добеши, И. Мейер, С. Малла, Г. Стренг, Ж. Баттле, П. Ж. Лемарье, Ч. Чуи, Р. Койфман, В. Свелденс, С. Б. Стечкин, В. А. Рвачев, И. Я. Новиков, В. Н. Малозёмов, А. П. Петухов, М. А. Скопина, Е. Е. Тыртышников, Ю. К. Демьянович, И. В. Оселедс, В. А. Жёлудев и др.

Вэйвлеты широко применяются при решении задач вычислительной математики и цифровой обработки сигналов. Как правило, в подобных задачах требуется найти коэффициенты разложения функции по некоторому базису с целью извлечения информации о функции, для последующей обработки или анализа. В теории вэйвлетов изучаются различные базисы, последовательности базисов, последовательности вложенных пространств, а также алгоритмы преобразования коэффициентов разложений функций по этим базисам. Вложенность позволяет получить представление исходного пространства в виде прямой (а иногда и ортогональной) суммы его подпространств.

В случае, когда сетка равномерная, для построения вэйвлетных разложений удаётся применить мощный аппарат гармонического анализа (в $L_2(\mathbb{R})$ и $l_2$). Однако, при обработке цифровых потоков с резко меняющимися характеристиками (со сменой плавного поведения на скачкообразное и наоборот) целесообразно использовать неравномерную сетку, приспосабливаемую к обрабатываемому потоку. Так для улучшения приближения могут понадобиться различные степени измельчения сетки в разных частях рассматриваемого промежутка, а для сжатия приближения — различные степени укрупнения сетки. Весьма важны случаи, когда исходные данные естественным образом связаны с некоторым многообразием (примерами могут служить цифровые потоки значений мощности излучения от поверхности тел различной формы: сферической, тороидальной и др.)

Для вэйвлетных разложений на неравномерной сетке можно использовать пространства сплайнов. Известна лифтинговая схема, основанная на интерполяции сплайнами. В настоящей работе исследуется вэйвлетная схема, основанная на аппроксимации сплайнами на неравномерной сетке с гарантированным порядком приближения и простыми формулами декомпозиции и реконструкции.

**Цель работы**. Получить новые вэйвлетные разложения в пространствах сплайнов с локальным базисом на неравномерной сетке, в том числе и в случае данных, естественным образом связанных с некоторым многообразием, вывести формулы декомпозиции и реконструкции, получить оценки аппроксимации, провести численную апробацию полученных результатов на модельных примерах.

**Методы исследования**. В диссертации используются методы линейной алгебры, дифференциальной геометрии и функционального анализа. Для построений применён метод аппроксимационных соотношений.

**Достоверность и обоснованность**. Достоверность результатов подтверждена строгими доказательствами; результаты согласуются с проведёнными численными экспериментами.

**Результаты, выносимые на защиту**.

1. Получено сплайн-вэйвлетное разложение пространств аппроксимаций лагранжева типа, использующих квадратичные и кубические сплайны на последовательности укрупняющихся сеток, установлены формулы декомпозиции и реконструкции, получены оценки устойчивости, а также оценки аппроксимации в пространствах с равномерной метрикой и в пространствах квадратично суммируемых функций.

2. Рассмотрены сплайн-вэйвлетные разложения пространств эрмитова типа первой высоты для весьма произвольных генерирующих функций (не обязательно полиномиальных); эти разложения, в частности, применимы для двойных потоков числовой информации, содержащих значения функции и её производных: здесь также установлены формулы декомпозиции и реконструкции.

3. Изучены некоторые сплайн-вэйвлетные разложения числовых потоков, отождествляемых естественным образом с гладким многообразием, а именно, числовых потоков, представляющих значения функций, заданных на нульмерном остове симплициального подразделения упомянутого многообразия; в качестве аппроксимирующих пространств рассмотрены пространства, натянутые на непрерывные аналоги курантовских функций, а вэйвлетные разложения строятся на цепочке вложенных пространств, соответствующей последовательности измельчающихся симплициальных подразделений упомянутого многообразия.

4. Доказан ряд теорем, связанных с построением непрерывных аналогов курантовских функций на произвольном дифференцируемом многообразии.

5. Теоретические результаты апробированы на модельных числовых примерах; моделирование сжатия и восстановления числовых потоков в указанных примерах показало соответствие практических результатов проведенным в работе теоретическим исследованиям.

**Научная новизна**. Все основные результаты диссертации являются новыми.

**Теоретическая и практическая полезность**. Данная работа носит теоретический характер, однако полученные результаты могут быть применены для создания эффективных алгоритмов решения многих прикладных задач, связанных с обработкой больших потоков числовой информации, в частности, к обработке изображений, к задачам интерполяции и аппроксимации, к численному решению ряда задач математической физики.

**Апробация работы**. Полученные результаты обсуждались на семинарах кафедры параллельных алгоритмов (2005-2008 гг.), кафедры вычислительной математики (2008 г.) и докладывались на XXXVIII международной научной конференции “Процессы управления и устойчивость”, С.-Петербург, 10-13 апреля 2006 г., и на конференции “Космос, астрономия и программирование” (Лавровские чтения), С.-Петербург, 20-22 мая 2008 г.

**Публикация результатов**. По теме диссертации опубликовано 5 работ. В работе [1] научному руководителю принадлежит идея построения всплескового разложения с помощью биортогональной системы, соискателю принадлежат вывод формул декомпозиции и реконструкции и фактическое построение всплескового разложения. В статье [3] научному руководителю принадлежит идея построения вэйвлетного разложения, соискателю принадлежит построение всплескового разложения сплайнов эрмитова типа и вывод расчётных формул декомпозиции и реконструкции. В статье [4] научному руководителю принадлежит идея построения оснащения клеточного подразделения, соискателю принадлежит реализация вэйвлетного разложения для кусочно-постоянных сплайнов. Работа [1] опубликована в журнале, имеющемся в перечне ВАК на момент публикации.

**Структура и объём работы**. Диссертация объёмом 101 страница состоит из введения, четырёх глав и списка литературы, а также одной таблицы и 5 рисунков.

# Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность диссертационной работы и излагаются основные результаты исследований.

В **первой главе** рассматриваются всплесковые разложения пространств сплайнов лагранжева типа. Пусть $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел; обозначим $n:m$ множество целых чисел от $n$ до $m$ включительно. На вещественной оси $\mathbb{R}$ рассмотрим бесконечную сетку узлов $X = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $x_j < x_{j+1}$, для которой $\lim\limits_{j\to-\infty} x_j = \alpha$, $\lim\limits_{j\to+\infty} x_j = \beta$; здесь не исключаются случаи, когда $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$. Линейное пространство функций, $l$ раз непрерывно дифференцируемых в точках открытого интервала $(\alpha, \beta)$, обозначим $C^l(\alpha, \beta)$. Рассмотрим полиномиальный сплайн второй степени $\omega_j$, определяемый однозначно (с точностью до некоторой ненулевой константы) условиями $\omega_j \in C^1(\alpha, \beta)$, $\operatorname{supp}\omega_j = [x_j, x_{j+3}]$. В пространстве $C^1(\alpha, \beta)$ рассмотрим линейные функционалы $g^{(i)}$, $i \in \mathbb{Z}$, определяемые формулой

$$\langle g^{(i)}, u\rangle = u(x_{i+1}) + \tfrac{1}{2}(x_{i+2} - x_{i+1})u'(x_{i+1}), \quad u \in C^1(\alpha, \beta). \tag{1}$$

Система функционалов $g = \{g^{(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ биортогональна системе функций $\omega = \{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ (при указанном в диссертации выборе функции $\omega_j$), $\langle g^{(i)}, \omega_j\rangle = \delta_{ij}$. Удаляя узел $x_k$ из сетки $X$, положим $\widetilde{x}_j = x_j$, $j < k$, $\widetilde{x}_j = x_{j+1}$, $j \geqslant k$, и рассмотрим новую (укрупнённую) сетку $\widetilde{X} = \{\widetilde{x}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Обозначим $\widetilde{\omega}_i$ полиномиальный сплайн второй степени на сетке $\widetilde{X}$ с носителем $[\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+3}]$ из пространства $C^1(\alpha, \beta)$, а за $\widetilde{g}^{(i)}$ обозначим функционал, определяемый формулой, полученной из (1) заменой $x_j$ на $\widetilde{x}_j$, таким образом $\langle \widetilde{g}^{(i)}, \widetilde{\omega}_j\rangle = \delta_{ij}$. Справедливо представление

$$\widetilde{\omega}_i(t) \equiv \sum_{j\in\mathbb{Z}} d_{ij}\,\omega_j(t); \tag{2}$$

где числа $d_{ij}$ отыскиваются по формулам:

$$d_{ij} = \delta_{ij}, \quad i < k-3,$$

$$d_{k-3,k-3} = 1, \quad d_{k-3,k-2} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1} - x_{k-2}}, \quad d_{k-3,j} = 0,\ j \notin k-3:k-2,$$

$$d_{k-2,k-2} = \frac{x_k - x_{k-2}}{x_{k+1} - x_{k-2}}, \quad d_{k-2,k-1} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+2} - x_{k-1}}, \quad d_{k-2,j} = 0,\ j \notin k-2:k-1,$$

$$d_{k-1,k-1} = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k+2} - x_{k-1}}, \quad d_{k-1,k} = 1, \quad d_{k-1,j} = 0,\ j \notin k-1:k,$$

$$d_{ij} = \delta_{i+1,j}, \quad i > k-1.$$

Соотношения вида (2) называются *калибровочными соотношениями.*

Рассмотрим пространство $\mathcal{P}(X)$, являющееся линейной оболочкой функций $\omega_j$,

$$\mathcal{P}(X) = \Big\{ \, u \mid u = \sum_j a_j \, \omega_j, \quad a_j \in \mathbb{R} \, \Big\};$$

и пространство

$$\mathcal{P}(\widetilde{X}) = \Big\{ \, \widetilde{u} \mid \widetilde{u} = \sum_i \widetilde{a}_i \, \widetilde{\omega}_i, \quad \widetilde{a}_i \in \mathbb{R} \, \Big\}.$$

Ввиду калибровочных соотношений справедливо включение $\mathcal{P}(\widetilde{X}) \subset \mathcal{P}(X)$. Введём оператор $P$ проектирования пространства $\mathcal{P}(X)$ на подпространство $\mathcal{P}(\widetilde{X})$:

$$Pu = \sum_j \langle \widetilde{g}^{(j)}, u \rangle \, \widetilde{\omega}_j, \quad u \in \mathcal{P}(X),$$

и оператор $Q = I - P$, где $I$ — тождественный оператор. Пространством всплесков (вэйвлетов) называется пространство $\mathcal{W} = Q\mathcal{P}(X)$, а получаемое прямое разложение

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\widetilde{X}) \dotplus \mathcal{W}$$

называется *сплайн-вэйвлетным разложением* пространства $\mathcal{P}(X)$. Доказывается, что пространство $\mathcal{W}$ одномерно, и что $\mathcal{W} = \big\{ b_{k-1}\omega_{k-1} \,|\, b_{k-1} \in \mathbb{R} \big\}$.

Пусть известны коэффициенты $\widetilde{a}_i$ и $b_{k-1}$ в разложениях проекций элемента $u \in \mathcal{P}(X)$ на пространства $\mathcal{P}(\widetilde{X})$ и $\mathcal{W}$. Для чисел $a_j$ получаем *формулы реконструкции*

$$a_j = \widetilde{a}_j, \quad j \leqslant k-3,$$
$$a_{k-2} = d_{k-2,k-2} \, \widetilde{a}_{k-2} + d_{k-2,k-1} \, \widetilde{a}_{k-1},$$
$$a_{k-1} = d_{k-1,k-1} \, \widetilde{a}_{k-1} + d_{k-1,k} \, \widetilde{a}_k + b_{k-1},$$
$$a_j = \widetilde{a}_{j-1}, \quad j \geqslant k.$$

Если же известны коэффициенты $a_j$ в разложении элемента $u \in \mathcal{P}(X)$ по базису $\mathcal{P}(X)$, то

$$\widetilde{a}_i = a_i, \quad i \leqslant k-3, \qquad \widetilde{a}_i = a_{i+1}, \quad i \geqslant k-1,$$
$$\widetilde{a}_{k-2} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k-2} - x_k} \, a_{k-3} + \frac{x_{k-2} - x_{k+1}}{x_{k-2} - x_k} \, a_{k-2},$$
$$b_j = 0, \quad j \neq k-1,$$
$$b_{k-1} = a_{k-1} - (d_{k-2,k-1}\widetilde{a}_{k-2} + d_{k-1,k-1}\widetilde{a}_{k-1}) =$$
$$= a_{k-1} - (d_{k-2,k-1}(g_{k-2,k-3}a_{k-3} + g_{k-2,k-2}a_{k-2}) + d_{k-1,k-1}a_k);$$

эти формулы называются *формулами декомпозиции.*

Далее на сетках $X$ и $\widetilde{X}$ рассматриваются полиномиальные кубические сплайны $\omega_j$ и $\widetilde{\omega}_j$, однозначно (с точностью до ненулевых постоянных множителей) определяемые условиями $\omega_j, \widetilde{\omega}_j \in C^2(\alpha, \beta)$, $\operatorname{supp}\, \omega_j = [x_j, x_{j+4}]$, $\operatorname{supp}\, \widetilde{\omega}_j = [\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+4}]$; между $\omega_j$ и $\widetilde{\omega}_i$ имеются калибровочные соотношения, аналогичные рассмотренным выше. Вводятся также системы функционалов $g = \{g^{(i)}\}$ и $\widetilde{g} = \{\widetilde{g}^{(i)}\}$, биортогональные системам функций $\{\omega_j\}$ и $\{\widetilde{\omega}_j\}$ соответственно, строится всплесковое разложение $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\widetilde{X}) \dotplus \mathcal{W}$ пространства выводятся формулы реконструкции и декомпозиции. Аналогичным образом рассматривается случай периодических кубических сплайнов на (вообще говоря, неравномерной) периодической сетке. Далее доказываются теоремы об устойчивости и аппроксимации.

**Теорема 1** (об устойчивости). *Для любой сетки $X$ верно неравенство*

$$\max_{j\in\mathbb{Z}} |a_j| \leqslant \max_{i\in\mathbb{Z}} |\widetilde{a}_i| + |b_{k-1}|,$$

*а если сетка $X$ локально квазиравномерна, т.е. удовлетворяет наравенству $\frac{1}{M} \leqslant \frac{x_{j+1}-x_j}{x_j-x_{j-1}} \leqslant$ $\leqslant M$ при некотором $M \geqslant 1$, справедлива оценка*

$$\max_{j\in\mathbb{Z}} |\widetilde{a}_j| \leqslant (2M^3 + 2M^2 + 2M + 1) \max_{i\in\mathbb{Z}} |a_i|.$$

**Теорема 2** (об аппроксимации в $C$). *Если $f \in C^4(\alpha, \beta)$, $[x_k, x_{k+1}] \subset (\alpha, \beta)$ и $u(t) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \langle g^{(j)}, f\rangle\, \omega_j(t)$, то при $t \in [x_k, x_{k+1}]$ верна оценка*

$$|f(t) - u(t)| \ \leqslant\ \tfrac{3}{4}\, l_k^4 \max_{\xi\in[x_{k-2},x_{k+1}]} |f^{(4)}(\xi)|,$$

*где $l_k = x_{k+3} - x_{k-2}$.*

**Теорема 3** (об аппроксимации в $L_2$). *Если $f \in W_2^4(\alpha, \beta)$, $[x_{k-2}, x_{k+1}] \subset (\alpha, \beta)$, $u(t) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \langle g^{(j)}, f\rangle\, \omega_j(t)$, то верна оценка*

$$||f - u|| \leqslant \left(\sqrt{\tfrac{117}{140}} + \tfrac{1}{6\sqrt{7}}\right) l_k^4\, ||f^{(4)}||_{L_2(x_{k-2},x_k)}.$$

Во **второй главе** рассматривается всплесковое разложение пространств сплайнов эрмитова типа. Для построения аппроксимации используются два потока: поток значений функции и поток значений её производной в узлах сетки $X$. Вводятся (не обязательно полиномиальные) функции $\omega_j(t)$, удовлетворяющие аппроксимационным соотношениям

$$\sum_j (\varphi'_{j+1}\, \omega_{2j-1}(t) + \varphi_{j+1}\, \omega_{2j}(t)) = \varphi(t),$$
$$\operatorname{supp} \omega_{2j-1} \subset [x_j, x_{j+2}], \quad \operatorname{supp} \omega_{2j} \subset [x_j, x_{j+2}],$$

где $\varphi(t)$ — четырёх-компонентная вектор-функция класса $C^1(\alpha, \beta)$, удовлетворяющая при $x, y \in (\alpha, \beta)$, $x \neq y$, условию

$$W(x, y; \varphi) = \det(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi(y), \varphi'(y)) \neq 0, \qquad (A)$$

а $\varphi_j = \varphi(x_j)$, $\varphi'_j = \varphi'(x_j)$. При сформулированных условиях функции $\omega_j(t)$ определяются однозначно из аппроксимационных соотношений и могут быть продолжены по непрерывности на интервал $(\alpha, \beta)$ до функции класса $C^1(\alpha, \beta)$; кроме того выполнены интерполяционные соотношения

$$\begin{array}{lll}
\omega_{2q-1}(x_q) = 0, & \omega_{2q-1}(x_{q+1}) = 0, & \omega_{2q-1}(x_{q+2}) = 0, \\
\omega'_{2q-1}(x_q) = 0, & \omega'_{2q-1}(x_{q+1}) = 1, & \omega'_{2q-1}(x_{q+2}) = 0, \\
\omega_{2q}(x_q) = 0, & \omega_{2q}(x_{q+1}) = 1, & \omega_{2q}(x_{q+2}) = 0, \\
\omega'_{2q}(x_q) = 0, & \omega'_{2q}(x_{q+1}) = 0, & \omega'_{2q}(x_{q+2}) = 0,
\end{array}$$

Пусть $\xi \in (x_k, x_{k+1})$, введём обозначения $\overline{x}_j = x_j$, $j \leqslant k$, $\overline{x}_{k+1} = \xi$, $\overline{x}_j = x_{j-1}$, $j \geqslant k+2$, $\overline{X} = \{\overline{x}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Аналогично предыдущему построим функции $\overline{\omega}_j(t)$ на сетке $\overline{X}$.

**Теорема 4.** *Если выполнено условие (A), то при $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\omega_i(t) \equiv \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_{ij}\, \overline{\omega}_j(t),$$

*где*

$$\begin{gathered}
d_{ij} = \delta_{ij}, \quad i \leqslant 2k-4, \qquad d_{ij} = \delta_{i,j-2}, \quad i \geqslant 2k+1, \\
\left.\begin{array}{r} d_{2k-3,j} = \delta_{2k-3,j}, \quad d_{2k-2,j} = \delta_{2k-2,j}, \\ d_{2k-1,j} = \delta_{2k+1,j}, \quad d_{2k,j} = \delta_{2k+2,j}, \end{array}\right. \quad j \neq 2k-1, 2k, \\
d_{2k-3,2k-1} = \omega'_{2k-3}(\xi), \quad d_{2k-3,2k} = \omega_{2k-3}(\xi), \\
d_{2k-2,2k-1} = \omega'_{2k-2}(\xi), \quad d_{2k-2,2k} = \omega_{2k-2}(\xi), \\
d_{2k-1,2k-1} = \omega'_{2k-1}(\xi), \quad d_{2k-1,2k} = \omega_{2k-1}(\xi), \\
d_{2k,2k-1} = \omega'_{2k}(\xi), \quad d_{2k,2k} = \omega_{2k}(\xi).
\end{gathered}$$

Далее в диссертации вводится система линейных функционалов $g^{(i)}$ над $C^1(\alpha, \beta)$ согласно формулам $\langle g^{(2q-1)}, u \rangle = u'(x_{q+1})$, $\langle g^{(2q)}, u \rangle = u(x_{q+1})$, $q \in \mathbb{Z}$. Вычисляются числа $g_{ij} = \langle g^{(i)}, \overline{\omega}_j \rangle$ и устанавливается, что матрица $\mathbf{G} = (g_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ является левой обратной к матрице $\mathbf{D}^T$, где $\mathbf{D} = (d_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$. На основании упомянутых результатов получается всплесковое разложение пространства

$$\mathcal{S}_\varphi(\overline{X}) = \Big\{\; u \;\Big|\; u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{a}_j\, \overline{\omega}_j, \;\; \overline{a}_j \in \mathbb{R} \;\Big\}$$

в прямую сумму пространства

$$\mathcal{S}_\varphi(X) = \Big\{\; u \;\Big|\; u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j\, \omega_j, \;\; a_j \in \mathbb{R} \;\Big\}$$

и двумерного вэйвлетного пространства $\mathcal{W} = \big\{\; b_{2k-1}\omega_{2k-1} + b_{2k}\omega_{2k} \;\big|\; b_{2k-1}, b_{2k} \in \mathbb{R} \;\big\}$.

**Теорема 5** (формулы декомпозиции). *Для всплескового разложения справедливы следующие соотношения*

$$a_i = \overline{a}_i, \quad i \leqslant 2k-2, \qquad a_i = \overline{a}_{i+2}, \quad i \geqslant 2k-1, \qquad b_j = 0, \quad j \neq 2k-1, k,$$

$$b_{2k-1} = \overline{a}_{2k-1} - \omega'_{2k-3}(\xi)\, \overline{a}_{2k-3} - \omega'_{2k-2}(\xi)\, \overline{a}_{2k-2} - \omega'_{2k-1}(\xi)\, \overline{a}_{2k+1} - \omega'_{2k}(\xi)\, \overline{a}_{2k+2},$$

$$b_{2k} = \overline{a}_{2k} - \omega_{2k-3}(\xi)\, \overline{a}_{2k-3} - \omega_{2k-2}(\xi)\, \overline{a}_{2k-2} - \omega_{2k-1}(\xi)\, \overline{a}_{2k+1} - \omega_{2k}(\xi)\, \overline{a}_{2k+2}.$$

**Теорема 6** (формулы реконструкции). *Для всплескового разложения формулы реконструкции имеют вид*

$$\overline{a}_j = a_j, \quad j \leqslant 2k-2, \qquad \overline{a}_i = a_{j-2}, \quad j \geqslant 2k+1,$$

$$\overline{a}_{2k-1} = b_{2k-1} + \omega'_{2k-3}(\xi)\, a_{2k-3} + \omega'_{2k-2}(\xi)\, a_{2k-2} + \omega'_{2k-1}(\xi)\, a_{2k-1} + \omega'_{2k}(\xi)\, a_{2k},$$

$$\overline{a}_{2k} = b_{2k} + \omega_{2k-3}(\xi)\, a_{2k-3} + \omega_{2k-2}(\xi)\, a_{2k-2} + \omega_{2k-1}(\xi)\, a_{2k-1} + \omega_{2k}(\xi)\, a_{2k}.$$

Далее рассмотренные формулы конкретизируются для случая $\varphi = (1, t, t^2, t^3)^T$, который соответствует полиномиальным эрмитовым сплайнам.

В **третьей главе** рассматривается всплесковое разложение на гладком многообразии. Пусть покрытие многообразия $\mathfrak{M}$ задано семейством множеств $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, каждое из которых гомеоморфно открытому $n$-мерному шару и имеет кусочно-гладкую границу. Буквами $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ – будем обозначать некоторые упорядоченные индексные множества. Для каждой точки $t \in \mathfrak{M}$ обозначим содержащее её множество $\mathfrak{C}_{(t)} = \cap_{t\in\mathfrak{S}_j}\mathfrak{S}_j$. Совокупность $\mathfrak{C}$ различных множеств $\mathfrak{C}_{(t)}$ конечна или счётна. В дальнейшем будем обозначать их $\mathfrak{C}_k$, $k \in \mathcal{K}$. Итак, $\mathfrak{C} = \{\ \mathfrak{C}_k \mid k \in \mathcal{K}\ \}$. Справедливы соотношения $\mathfrak{C}_{k'} \cap \mathfrak{C}_{k''} = \emptyset$, $k', k'' \in \mathcal{K}$, $k' \neq k''$,

$$Cl(\mathfrak{S}_j) = \bigcup_{\mathfrak{C}_k\subseteq\mathfrak{S}_j} Cl(\mathfrak{C}_k), \qquad Cl\Big(\bigcup_{k\in\mathcal{K}} \mathfrak{C}_k\Big) = Cl(\mathfrak{M}).$$

где символ $Cl$ означает замыкание. Для фиксированной точки $t \in \mathfrak{M}$ мощность $\kappa_t$ множества $\{\ j \mid t \in \mathfrak{S}_j\ \}$ называется *кратностью накрытия* точки $t$ семейством $\mathfrak{S}$. Пусть существует натуральное число $\kappa$ такое, что почти для всех точек $t \in \mathfrak{M}$ справедливо равенство $\kappa_t = \kappa$, тогда семейство $\mathfrak{S}$ называется *$\kappa$-накрывающим.* Если для почти всех точек $t \in \mathfrak{M}$ система вектров $A_{(t)} = \{\ \mathbf{a}_j \mid t \in \mathfrak{S}_j\ \}$ является базисом пространства $\mathbb{R}^q$, будем говорить что семейство подмножеств $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ многообразия $\mathfrak{M}$ оснащено $q$-полной системой векторов $A = \{\ \mathbf{a}_j \mid j \in \mathcal{J},\ \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^q\}$. В этом случае система векторов $A$ называется $q$-полным оснащением семейства $\mathfrak{S}$.

Для $q$-накрывающего семейства $\mathfrak{S}$ $q$-полное оснащение $A$ называется просто *полным оснащением.* Для полного оснащения $A$ введём обозначение $A_k = A_{(t)}$, $t \in \mathfrak{C}_k$. Рассмотрим вектор-функцию $\varphi:\ \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^{m+1}$ с компонентами из пространства $\mathbb{X}(\mathfrak{M})$.

**Теорема 7.** *Пусть $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ – $m+1$-накрывающее семейство, а система вектор-столбцов $A = \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ – полное оснащение семейства $\mathfrak{S}$. Тогда существует единственная вектор-функция (столбец) $\omega(t) = (\omega_j(t))_{j\in\mathcal{J}}$, $t \in \mathfrak{M}$, почти везде удовлетворяющая соотношениям*

$$\omega^T A = \varphi, \tag{3}$$

$$\omega_j(t) = 0, \quad t \notin \mathfrak{S}_j, \quad j \in \mathcal{J}. \tag{4}$$

Соотношения (3)-(4) называются *аппроксимационными*, линейная оболочка функций $\omega_j$, $j \in \mathcal{J}$, пространством $(A, \varphi, \mathfrak{S})$-сплайнов.

**Теорема 8.** *Пусть $\mathfrak{S}$ и $\widetilde{\mathfrak{S}}$ – $m+1$-нарывающие семейства, а системы вектор-столбцов $A = \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ и $\widetilde{A} = \{\widetilde{\mathbf{a}}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ – соответствующие полные оснащения. Если матрица $\mathbf{D}$ такова, что $\mathbf{D}^T\widetilde{A} = A$, $[\mathbf{D}\omega]_i(t) = 0$, $t \notin \widetilde{\mathfrak{S}}_i$, $i \in \mathcal{I}$, то*

$$\widetilde{\omega} = \mathbf{D}\,\omega. \tag{5}$$

где $[\varphi]_i$ обозначает $i$-ю компоненту вектора $\varphi$.

**Следствие.** *Пусть система функций $\omega = \{\omega_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ линейно независима и имеется биортогональная к ней система функционалов $g = \{g^{(j)}\}_{j\in\mathcal{J}}$: $g\,\omega^T = I$. Тогда $\mathbf{D} = (\,g\widetilde{\omega}^T)^T$.*

В пространстве $\mathbb{X}(\mathfrak{M})$ рассмотрим две линейно независимые системы элементов $\omega = \{\omega_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ и $\widetilde{\omega} = \{\widetilde{\omega}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Положим

$$\mathcal{P} = \Big\{\ u\ \Big|\ u = \sum_{j\in\mathcal{J}} a_j\,\omega_j,\ a_j \in \mathbb{R}\Big\}, \qquad \widetilde{\mathcal{P}} = \Big\{\ \widetilde{u}\ \Big|\ \widetilde{u} = \sum_{i\in\mathcal{I}} \widetilde{a}_i\,\widetilde{\omega}_i,\ \widetilde{a}_i \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Пусть выполнено соотношение (5), так что $\widetilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ и $\mathcal{P} = \widetilde{\mathcal{P}} \dot{+} \mathcal{W}$. Обозначим $g = \{g^{(j)}\}_{j\in\mathcal{J}}$ и $\widetilde{g} = \{\widetilde{g}^{(i)}\}_{i\in\mathcal{I}}$ системы функционалов, биортогональные $\omega$ и $\widetilde{\omega}$: $g\,\omega^T = \widetilde{g}\,\widetilde{\omega}^T = I$.

**Теорема 9.** *Пусть функционалы $\widetilde{g}^{(i)}$ линейно продолжены на пространство $\mathcal{P}$, тогда матрица $\mathbf{G} = \widetilde{g}\,\omega^T$ является левой обратной к матрице $\mathbf{D}^T$.*

**Теорема 10.** *В условиях теоремы 9, пусть элемент $u \in \mathcal{P}$ записан в виде суммы $u = \widetilde{u} + w$, $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, $w \in \mathcal{W}$. Тогда для векторов $a$, $\widetilde{a}$ и $b$, определяемых равенствами $u = \omega^T a$, $\widetilde{u} = \widetilde{\omega}^T \widetilde{a}$, $w = \omega^T b$, справедливы формулы декомпозиции*

$$\widetilde{a} = \mathbf{G}a, \tag{6}$$

$$b = a - \mathbf{D}^T\mathbf{G}\,a \tag{7}$$

*и формулы реконструкции*

$$a = \mathbf{D}^T\widetilde{a} + b. \tag{8}$$

Далее предлагается способ построения системы функционалов биортогональной системе $\omega = \{\omega_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ с использованием аппроксимационных соотношений. Полученные результаты применяются к построению всплескового разложения пространств кусочно-постоянных сплайнов.

Остальная часть третьей главы посвящена построению всплескового разложения пространств курантова типа. Рассмотрим (при $m = n$) $n+1$-компонентную вектор-функцию $\varphi(\mathbf{t})$ класса $C^1(\Omega)$, где $\Omega$ – область в $\mathbb{R}^n$. Будем считать область $\Omega$ симплициально подразделённой; пусть $\mathcal{T} = \{\tau_p\}_{p\in\mathcal{K}}$ — соответствующий симплициальный комплекс (возможно, криволинейный) с конечным или счётным множеством открытых $n$-мерных симплексов. Множество вершин (нульмерный остов комплекса) обозначим $X$, а сами вершины $\mathbf{x}_i$, $i \in \mathcal{J}$; множество $X$ называется сеткой, а вершины $\mathbf{x}_i$ — узлами этой сетки. Множество индексов, соответствующих вершинам симплекса $\tau_p$ обозначим $\mathcal{J}_p = \{\, i \mid \mathbf{x}_i \in Cl(\tau_p)\,\}$. На каждом симплексе $\tau_p$ введём локальную нумерацию с помощью взаимно однозначного отображения $\chi_{_p}:\ 0\!:\!n \to \mathcal{J}_p$. Положим

$$d_{\varphi,p} = \det(\varphi(\mathbf{x}_{\chi_p(0)}), \varphi(\mathbf{x}_{\chi_p(1)}), \ldots, \varphi(\mathbf{x}_{\chi_p(n)})),$$

$$d_{\varphi,p,i}(\mathbf{t}) = \det\left(\,\varphi(\mathbf{x}_{\chi_p(0)}), \varphi(\mathbf{x}_{\chi_p(1)}), \ldots, \varphi(\mathbf{x}_{\chi_p(n)}) \,||\,'^{\,i}\, \varphi(\mathbf{t})\,\right), \quad i = 0\!:\!n,$$

где символ $||\,'^{\,i}\, \varphi(\mathbf{t})$ означает замену $i$-го столбца $\varphi(\mathbf{x}_{\chi_p(i)})$ в рассматриваемом определителе на столбец $\varphi(\mathbf{t})$. Предположим, что выполнено условие

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ такое, что для любого симплекса } \tau_p \in \mathcal{T}, \ \ |d_{\varphi,p}| \geqslant \varepsilon. \tag{$B$}$$

Рассмотрим функции $\omega_i(\mathbf{t})$, определяемые соотношениями

$$\sum_{i\in\mathcal{J}_p} \varphi(\mathbf{x}_i)\,\omega_i(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in \tau_p, \tag{9}$$

$$\omega_i(\mathbf{t}) = 0, \quad \mathbf{t} \notin \mathfrak{S}_i. \tag{10}$$

Из предположения $(B)$ следует, что функции $\omega_i(\mathbf{t})$ однозначно определены на всех симплексах $\tau_p$, так что

$$\omega_i(\mathbf{t}) = \begin{cases} d_{\varphi,p,\chi_p^{-1}(i)}(\mathbf{t}) \big/ d_{\varphi,p}, & \mathbf{t} \in \tau_p \subset \mathfrak{S}_i, \\ 0, & \mathbf{t} \notin \mathfrak{S}_i. \end{cases} \tag{11}$$

Обозначим $D_i\varphi$ первую частную производную функции $\varphi$ по $i$-й координате $[\mathbf{x}]_i$ переменной $\mathbf{x}$. Пусть $B_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\ \mathbf{x} \mid ||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||_{\mathbb{R}^n} < \delta\}$, в случае, когда положение центра шара значения не имеет, используется обозначение $B_\delta$ без указания его центра. Предположим, что выполнено условие

$$\exists\, \varepsilon > 0, \text{ что } |\det(\varphi(\mathbf{t}), D_1\varphi(\mathbf{t}), \ldots, D_n\varphi(\mathbf{t}))| \geqslant \varepsilon, \quad \forall\, \mathbf{t} \in Cl(\Omega). \tag{$C_\varepsilon$}$$

**Лемма 1.** *Если $\varphi \in C^S(Cl(\Omega))$, $S > 1$, $Cl(\Omega)$ — компакт, и выполнено условие $(C_\varepsilon)$, то каково бы ни было число $c > 0$, существует $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ такое, что при любых векторах $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in B_\delta \cap \Omega$, удовлетворяющих неравенству $|\det(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2-\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n-\mathbf{x}_0)| \geqslant c\,\delta^n$, верно соотношение $|\det(\varphi(\mathbf{x}_0), \varphi(\mathbf{x}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{x}_n))| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$.*

Введём множество $\mathcal{L} = \{\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid \det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\mathbf{x}_0), \ldots, \varphi(\mathbf{x}_{n-1})) = 0\ \}$, и вектор $\mathbf{g}$, такой что

$$\mathbf{g}^T\mathbf{x} \equiv \det(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2-\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}-\mathbf{x}_0), \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

**Лемма 2.** *Если $\varphi \in C^S(Cl(\Omega))$, $S > 1$, $Cl(\Omega)$ — компакт, выполнено условие $(C_\varepsilon)$, то для любого $c > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$, что при любых векторах $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in B_\delta \cap \Omega$, удовлетворяющих неравенству $||\mathbf{g}|| \geqslant c\,\delta^{n-1}$, множество $\mathcal{L} \cap B_\delta \cap \Omega$ представляет собой простую $n-1$-мерную поверхность класса $C^S$ (т.е. $S$-диффеоморфную $n-1$-мерному шару).*

Пусть т — $n$-мерный прямолинейный симплекс с вершинами $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Радиусы вписанного и описанного шаров для симплекса т обозначим $r_{\text{т}}$ и $R_{\text{т}}$ соответственно. Введём условие

$$\exists\, \eta > 0, \text{ что } \frac{r_{\text{т}}}{R_{\text{т}}} \geqslant \eta. \tag{$D_\eta$}$$

На основании упомянутых вспомогательных утверждений устанавливаются следующие теоремы.

**Теорема 11.** *Если $\varphi \in C^S(Cl(\Omega))$, $S > 1$, $Cl(\Omega)$ — компакт, и выполнено условие $(C_\varepsilon)$, то каково бы ни было $\eta > 0$, найдётся $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$ такое, что для любого прямолинейного симплициального подразделения Т, все $n$-мерные симплексы т которого удовлетворяют условию $(D_\eta)$ и неравенству $R_{\text{т}} \leqslant \delta$, существует криволинейное симплициальное подразделение $\mathcal{T}$ с теми же вершинами, криволинейные симплексы $\tau$ которого определяются $n-1$-мерными гранями класса $C^S$, задаваемыми аналогично $\mathcal{L}$.*

**Теорема 12.** *Пусть в условиях теоремы 11 выполнено условие $(B)$, тогда на криволинейном симплициальном подразделении $\mathcal{T}$ функции $\omega_j$ определены и непрерывны в области $Cl(\Omega)$.*

Из условия $(C_\varepsilon)$ следует, что система функций $[\varphi]_i$, $i \in 0\!:\!n$, линейно независима на любом симплексе $\tau_p$ подразделения $\mathcal{T}$; благодаря этому система функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ также является линейно независимой. Система функционалов $\{g^{(i)}\}_{i\in\mathcal{J}}$, заданная на пространстве $C(\Omega)$ формулами $\langle g^{(i)}, u\rangle = u(\mathbf{x}_i)$, $i \in \mathcal{J}$, $u \in C(\Omega)$, биортогональна системе функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathcal{J}}$.

Рассмотрим симплициальное подразделение $\overline{\mathcal{T}} = \{\overline{\tau}_q\}_{q\in\overline{\mathcal{K}}}$ области $\Omega$, которое является измельчением подразделения $\mathcal{T}$. Для $\overline{\mathcal{T}}$ рассмотрим построения, аналогичные тем, которые были сделаны для $\mathcal{T}$. Нульмерный остов (множество вершин) симплициального комплекса $\overline{\mathcal{T}}$ обозначим $\overline{X}$, а сами вершины — символами $\overline{\mathbf{x}}_j$, $j \in \overline{\mathcal{J}}$. Множество индексов, соответствующих вершинам симплекса $\overline{\tau}_q$, обозначим $\overline{\mathcal{J}}_q$. На каждом симплексе $\overline{\tau}_q$, как и прежде, вводится локальная нумерация с помощью биекции $\eta_q :\ 0:n \to \overline{\mathcal{J}}_q$. Положим

$$\overline{d}_{\varphi,q} = \det(\varphi(\overline{\mathbf{x}}_{\eta_q(0)}), \varphi(\overline{\mathbf{x}}_{\eta_q(1)}), \ldots, \varphi(\overline{\mathbf{x}}_{\eta_q(n)})),$$

$$\overline{d}_{\varphi,q,i}(\mathbf{x}) = \det\big(\varphi(\overline{\mathbf{x}}_{\eta_q(0)}), \varphi(\overline{\mathbf{x}}_{\eta_q(1)}), \ldots, \varphi(\overline{\mathbf{x}}_{\eta_q(n)}) \,||\,'^{\,i}\, \varphi(\mathbf{x})\big).$$

Рассмотрим функции $\overline{\omega}_j(\mathbf{t})$, определяемые соотношениями

$$\sum_{j\in\overline{\mathcal{J}}_q} \varphi(\overline{\mathbf{x}}_j)\,\overline{\omega}_j(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in \overline{\tau}_q, \qquad \overline{\omega}_j(\mathbf{t}) = 0, \quad \mathbf{t} \notin \overline{\mathfrak{S}}_j.$$

При сделанных предположениях функции $\overline{\omega}_j(\mathbf{t})$ определяются однозначно,

$$\overline{\omega}_j(\mathbf{t}) = \begin{cases} \overline{d}_{\varphi,q,\eta_q^{-1}(j)}(\mathbf{t}) / \,\overline{d}_{\varphi,q}, & \mathbf{t} \in \overline{\tau}_q \subset \overline{\mathfrak{S}}_j, \\ 0, & \mathbf{t} \notin \overline{\mathfrak{S}}_j, \end{cases}$$

и непрерывны в области $\Omega$.

Рассмотрим систему функционалов $\{\overline{g}^{(i)}\}_{i\in\overline{\mathcal{J}}}$, заданную на пространстве $C(\Omega)$ формулами $\langle \overline{g}^{(i)}, u\rangle = u(\overline{\mathbf{x}}_i)$, $i \in \overline{\mathcal{J}}$, $u \in C(\Omega)$; $\langle \overline{g}^{(i)}, \overline{\omega}_j\rangle = \delta_{ij}$, $i,j \in \overline{\mathcal{J}}$. Введём вектор-столбцы $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathcal{J}}$, $g = (g^{(i)})_{i\in\mathcal{J}}$, $\overline{\omega} = (\overline{\omega}_j)_{j\in\overline{\mathcal{J}}}$, $\overline{g} = (\overline{g}^{(j)})_{j\in\overline{\mathcal{J}}}$, отображение $\nu : \mathcal{J} \to \overline{\mathcal{J}}$, так что $\mathbf{x}_j = \overline{\mathbf{x}}_{\nu(j)}$, и рассмотрим матрицу $\mathbf{D} = (\overline{g}\omega^T)^T$.

**Теорема 13.** *В условиях теоремы 11 для систем $\omega_i$ и $\overline{\omega}_j$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\omega_i(\mathbf{t}) \equiv \sum_{j\in\overline{\mathcal{J}}_q} \langle \overline{g}^{(j)}, \omega_i\rangle\,\overline{\omega}_j(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in \overline{\tau}_q;$$

*формулы декомпозиции* (6)-(7) *могут быть записаны в виде*

$$a_i = \overline{a}_{\vartheta(i)},\ i \in \mathcal{J}, \qquad b_j = \overline{a}_j - \sum_{i\in\mathcal{J},\, \overline{\mathbf{x}}_j \in Int(\mathfrak{S}_i)} \langle \overline{g}^{(j)}, \omega_i\rangle\,\overline{a}_{\vartheta(i)}, \quad j \in \overline{\mathcal{J}},$$

*а формулы реконструкции* (8) *в виде*

$$\overline{a}_j = \sum_{i\in\mathcal{J},\, \overline{\mathbf{x}}_j \in Int(\mathfrak{S}_i)} \langle \overline{g}^{(j)}, \omega_i\rangle\, a_i + b_j, \quad j \in \overline{\mathcal{J}}.$$

Теоретические результаты проиллюстрированы на нескольких модельных примерах. Рассмотрен двумерный случай. В плоскости $\mathbb{R}^2$ симплициальное подразделение представляет собой триангуляцию. Предположения теоремы 11 принимают вид $\det(\varphi(\mathbf{x}), D_1\varphi(\mathbf{x}), D_2\varphi(\mathbf{x})) \geqslant \varepsilon > 0$, $\mathbf{x} \in Cl(\Omega)$. Устанавливаются некоторые вспомогательнвые утверждения, которые позволяют установить необходимые и достаточные условия отличия от нуля угла между кривыми рассматриваемой криволинейной триангуляции. Рассмотрен иллюстративный пример с использованием функций Куранта. Здесь вычисляются коэффициенты матрицы декомпозиции $g_{ij} = \overline{\omega}_j(\mathbf{x}_i)$, $i \in \mathcal{J}$, $j \in \overline{\mathcal{J}}$,

$$g_{ij} = \begin{cases} 0, & i \in \mathcal{J},\ j \in \overline{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{J}, \\ \delta_{ij}, & i,j \in \mathcal{J}. \end{cases}$$

Элементы $d_{ji}$ матрицы $\mathbf{D}^T$ имеют вид

$$d_{ji} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \quad \overline{\mathbf{x}}_j \notin Int(\mathfrak{S}_i), \quad i \in \mathcal{J}, \ j \in \overline{\mathcal{J}}, \\ \frac{1}{2} & i \neq j, \quad \overline{\mathbf{x}}_j \in Int(\mathfrak{S}_i), \\ 1 & i = j. \end{cases} \tag{12}$$

Второй пример иллюстрирует построение аппроксимаций курантова типа и их вэйвлетных разложений при полном исчерпании области с криволинейной границей. В качестве области рассмотрено кольцо и полукольцо.

**Четвёртая глава** посвящена реализации всплескового сжатия на некоторых модельного примерах в одномерном случае. В первой части этой главы рассматривается алгоритм укрупнения исходной сетки. В качестве исходной бралась равномерная сетка $x_j = jh$. Предложены формулы для количества удаляемых узлов мелкой сетки $\{x_j\}$. За каждым сохраняемым узлом $x_j$ следует сохраняемый узел $x_{j+S}$ исходной сетки; таким образом, узлы в количестве $S-1$ удаляются. Укрупнённая сетка $\widetilde{x}_i$ выбиралась таким образом, чтобы “степень её густоты” была пропорциональна производной (или разностному отношению) исходной функции (соответственно, числового потока). Для числа $S$ предложены различные формулы. Самый простой вариант даёт формула

$$S = \left\lfloor \frac{\int_a^b |f'(x)| dx}{Mh|f'(x)|} \right\rfloor .$$

где $(a, b)$ - интервал, на котором предполагается сохранить $M$ узлов укрупнённой сетки. В другом варианте рассматривается формула, основанная на использовании интегрального среднего. Здесь рассматривается количество $S(c, d)$ удаляемых узлов на интервале $(c, d) \subset (a, b)$, где

$$S(c,d) = \left\lfloor \frac{\int_a^b |f'(x)| dx}{\frac{Mh}{d-c} \int_c^d |f'(x)| dx} \right\rfloor .$$

К возможным неприятностям с использованием предыдущих формул относятся случая когда $f(x)$ постоянна. В этих случаях заменатель может обратиться в ноль, поэтому рассматривается модификация этих формул вида

$$S^* = \left\lfloor \frac{C}{P\left(\frac{1}{qh} \ \int_x^{x+qh} |f'(t)| dt + \frac{C}{g}\right)} \right\rfloor ,$$

где где $x$ — рассматриваемая точка, $P$ — относительное количество сохраняемых узлов $(0 < P \leqslant 1)$, $h$ — шаг исходной мелкой сетки, $h > 0$, $q$ — параметр усреднения $(q \geqslant 1)$, определяющий длину промежутка усреднения (эта длина равна $qh \geqslant 0$), $g$ — параметр (целое число, $g \geqslant 1$) , характеризующий максимальное количество единовременно удаляемых узлов (это количество в дальнейшем полагается равным $g$), $C = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f'(t)| dt$; эта константа решающего значения не имеет. В соответствие с последней формулой приближённое значение $\overline{S}^*$ для $S^*$ определяется по формуле

$$\overline{S}^* = \left\lfloor \frac{\overline{C}}{P\left(\frac{1}{q} \sum_{j=i}^{i+q-1} |f'(jh)| + \frac{\overline{C}}{g}\right)} \right\rfloor .$$

где $i \in 0 : N-1$ — номер рассматриваемого узла сетки $X = \{x_j\}_{j \in 0:N}$, $\overline{C} \approx \frac{1}{N} \ \sum_{j=0}^{N-1} |f'(x_j)|$; эта константа может вычисляться приближённо, поскольку она решающего значения не имеет.

Входной поток образуем с помощью чисел $a_j$, $a_j = \langle g^{(j)}, u\rangle$, $u \in C^1(\alpha, \beta)$. Функцию $u(t)$ назовём функцией, генерирующей числовой поток $\{a_j\}$ или просто – *генерирующей* функцией.

В проведённом численном эксперименте рассматривался отрезок $[0, \pi]$ $(a = 0,\ b = \pi)$, исходная сетка $X = \{x_j\}$ бралась равномерной, $x_j = jh$, а сетка $\widetilde{X}$ – неравномерной. Сетки строились с тем расчётом, чтобы во внешности рассматриваемого отрезка $[a, b]$ имелось по крайней мере по три сеточных узла справа и слева от него.

Оценкой нормы разности двух аналитически заданных функций считался максимум значений абсолютной величины этой разности, вычисленной в узлах вспомогательной сетки, получаемой из рассматриваемой стократным измельчением каждого элементарного сеточного промежутка.

Рассмотрены два подхода к исследованию эффективности предложенного алгоритма. Первый подход состоит в том, что исходной является аналитически заданная или таблично заданная функция $f(t)$ (в последнем случае таблица должна быть настолько плотной и точной, чтобы такое задание в пределах необходимой точности давало бы тот же результат, что и аналитическое; в частности, первые производные должны вычисляться по разностям с большой точностью). Первым шагом алгоритма является аппроксимация на исходной равномерной сетке и оценка нормы уклонения сплайна от функции $f(t)$. Второй шаг — укрупнение сетки, получение основного и вэйвлетного потоков по формулам декомпозиции. Третий шаг: построение сплайна по основному потоку, приближённое восстановление входного потока по построенному сплайну, оценка уклонения этого потока от генерирующей функции $f(t)$. Четвёртый шаг — восстановление входного потока по формулам реконструкции, оценка уклонения результата восстановления от входного потока.

При втором подходе предполагается, что после генерации входного потока генерирующая функция $f(t)$ становится недоступной. Последовательность действий в этом случае та же самая, но вместо оценки уклонения от генерирующей функции рассматривается оценка уклонения от сплайна, рассмотренного на первом шаге.

В качестве генерирующих функций брались функции $t^i$, $\frac{1}{1+t^2}$, $sin(t)$, $sin(10t)$. Число узлов исходной сетки во всех случаях равнялось 1200, число узлов укрупнённой сетки колебалось от 120 до 150. Коэффициент сжатия входного потока, т.е. отношение объёма выходного потока (в байтах на диске) к объёму входного потока, колебался от 0.11 до 0.15. Полученные численные результаты показали полное согласие с полученными в работе теоретическими результатами.

# Публикации по теме диссертации


[1] Демьянович Ю. К., Зимин А. В. *Всплесковое (вэйвлетное) разложение пространств периодических B-сплайнов второй степени на неравномерной сетке.* // Вестник СПбГУ, Серия 1. 2006. № 4. С.72-77.

[2] Зимин А. В. *О построении вэйвлет-разложения на периодической неравномерной сетке.* // Тр. 37-й междун. научной конф. аспирантов и студентов. СПб., 10-13 апреля 2006 г. / Под ред. А.В. Платонова, Н.В. Смирнова. - СПб., Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. С.150-155.

[3] Демьянович Ю. К., Зимин А. В. *О всплесковом разложении сплайнов эрмитова типа.* // Проблемы матем. анализа. 2007. Т.35. С.33-45.

[4] Демьянович Ю. К., Зимин А. В. *Вэйвлетные разложения на многообразии.* Зап. научн. семин. ПОМИ, 2007, Т.346. С.1-13.

[5] Зимин А. В. *Вэйвлетная схема, основанная на аппроксимации кубическими B-сплайнами на неравномерной сетке* сб. Методы вычислений. 2008. Т.23. С.56-73.