

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

СИНИЛЬЩИКОВА Галина Александровна

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО
ПОДХОДА В ДИНАМИКЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Специальность 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург 2008

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор ЗЕГЖДА Сергей Андреевич

Официальные оппоненты:

чл.-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор,
ПЕТРОВ Юрий Викторович,

кандидат технических наук,
старший научный сотрудник
РЫБАКИНА Оксана Григорьевна

Ведущая организация:

Балтийский государственный
технический университет «Военмех»

Защита состоится " ____ " _____ 2008 г. в ____ часов на заседании совета Д 212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, ауд. ____

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7/9.

Автореферат разослан " __ " _____ 2008 г.

И.о. ученого секретаря диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор

Ю. М. Даль.

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. Работа посвящена развитию квазистатического подхода к решению задач динамики для балочных систем. Этот подход основан на рассмотрении упругих систем, имеющих связи, например опоры, как свободных систем, на которые действуют реакции связей. Данные реакции уравниваются силами инерции системы, которые соответствуют предположению, что система является абсолютно твердой. Величины реакций определяются при этом так, чтобы суммарные перемещения точек системы, вызванные ее движением как абсолютно твердого тела и ее деформациями, удовлетворяли уравнениям связей. Впервые такой подход был применен Г.Герцем при решении задачи о соударении шаров. Условие того, что шары при соударении не проникают друг в друга, является голономной связью. Полагая, что ее реакция, равная силе соударения, уравнивается силами инерции поступательного движения шаров, Герц связал сближение шаров с силой соударения, т.е. свел задачу к системе с одной с степенью свободы.

В работах С.А. Зегжды и В.Н. Вернигора квазистатический подход Герца был обобщен и применен к широкому кругу задач динамики упругих систем. В настоящей работе новый вклад в квазистатический подход основан на рассмотрении внутренних силовых факторов в характерных сечениях и реакций связей в качестве обобщенных лагранжевых координат. Использование этих координат дало возможность в аналитической форме и притом достаточно точно найти первую собственную частоту и форму продольных и изгибных колебаний стержня переменного поперечного сечения. Рассмотрен свободный стержень и стержень, один конец которого заделан. Задача динамики развития трещины в тонком брусе при импульсном нагружении за счет введения изгибающего момента и перерезывающей силы в вершине трещины в качестве обобщенных лагранжевых координат значительно упростилась. Это позволило в рамках модели с тремя степенями свободы описать те основные аспекты развития трещины, которые наблюдаются в уникальных экспериментах, проводимых в СПбГУ под руководством чл.-корр. РАН Ю.В.Петрова.

Таким образом, тема диссертации является актуальной.

Цель работы. Основная цель работы заключается в том, чтобы продемонстрировать эффективность квазистатического подхода к задачам динамики упругих систем и показать целесообразность использования реакций связей и внутренних силовых факторов как обобщенных лагранжевых координат.

Методы исследований. При достижении поставленной цели используется квазистатический подход, а также принцип освобожденности от связей, полнота системы собственных функций свободного стержня, универсальность уравнений Лагранжа второго рода.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

- Показано, что, если свободный стержень переменного поперечного сечения мысленно разбить на две части и предположить, что каждая из частей под действием сил, приложенных к ней со стороны другой части,

деформируется квазистатически, то при изгибных колебаниях система имеет четыре степени свободы, а при продольных – две. Полагая, что сечение, которым стержень разделяется на две части, является неподвижным, приходим к рассмотрению консоли. При изгибных колебаниях система имеет две степени свободы и обобщенными координатами являются величины, пропорциональные изгибающему моменту и перерезывающей силе в заделке. Найденные приближенные значения первой частоты для консолей в виде клина и конуса больше точных соответственно на 0,1% и 0,2%. При продольных колебаниях погрешность приближенного значения больше, чем при изгибных. Так, для стержня в виде усеченного клина с заделанным концом приближенное значение первой частоты выше точного на 1,1%.

- Построена квазистатическая модель динамики раскрытия трещины в тонком бруске при импульсном нагружении ее исходных берегов. В нулевом приближении модель имеет три степени свободы. Обобщенными лагранжевыми координатами являются изгибающий момент и перерезывающая сила в вершине трещины, а также длина трещины.
- Предложен алгоритм построения последующих приближений, основанный на добавлении к этим трем координатам новых координат, позволяющих динамически учесть несколько первых форм колебаний свободного стержня. Показано, что можно ограничиться моделью, имеющей шесть степеней свободы.
- Показано, что раскрытие трещины носит ступенчатый характер.
- Определена минимальная величина импульса, при котором начинает развиваться трещина.
- Построена феноменологическая модель, позволяющая определить зависимость длины раскрытия трещины от импульса приложенной нагрузки.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Развитые в ней методы могут быть применены при решении различных задач динамики балочных систем. Материал, изложенный в диссертации, может быть использован при чтении специальных курсов по актуальным проблемам механики и механике деформируемого твердого тела.

Апробация работы. Полученные в работе результаты были представлены автором на следующих конференциях [1, 2, 4, 5]:

Международная конференция «Четвертые Окуневские чтения», Санкт-Петербург, 2004 г.; Международная научно-техническая конференция «Вычислительная механика деформируемого твердого тела», Москва, 2006 г.; Международная конференция по механике «Четвертые Поляховские чтения», Санкт-Петербург, 2006 г.

Результаты докладывались на семинарах кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ (2007 – 2008 гг.), а также на семинаре Института проблем машиноведения РАН «Нестационарные задачи механики и физики» (2007 г.), на секции теоретической механики в Доме Ученых им. М.Горького (2007 г.).

Публикации. По теме диссертации имеется 6 публикаций [1–6], в том числе 1 статья в журнале, рекомендованном ВАК. В совместной работе [6] соавтору принадлежит постановка задачи и метод решения, диссертанту принадлежит реализация предложенного метода и результаты расчетов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 57 наименований. Число иллюстраций равно 19. Общий объем работы 86 страниц.

Содержание диссертации

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, приведена краткая история квазистатического подхода в динамике упругих систем, дан обзор литературы, сформулированы цели и задачи работы, а также результаты, выносимые на защиту.

В **первой главе** рассматриваются изгибные колебания консоли переменного поперечного сечения – рис. 1 (а). Координата x отсчитывается от свободного конца балки, l – длина консоли, $A(x)$ и $J(x)$ – соответственно площадь и момент инерции поперечного сечения x , $y(x, t)$ – прогиб сечения x .

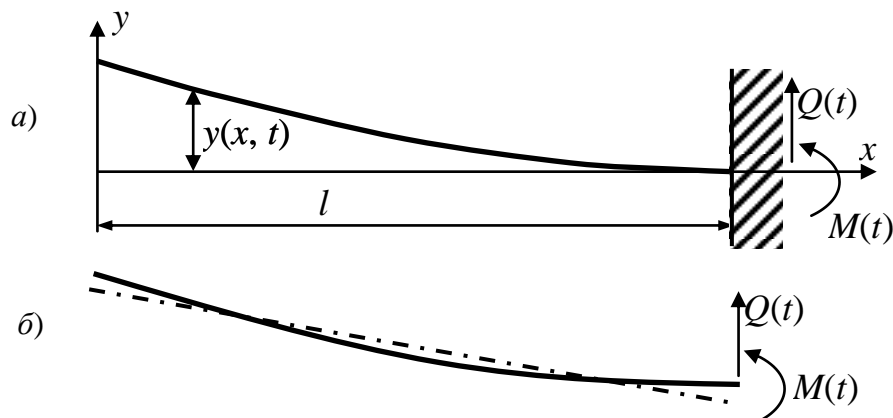


Рис.1. Консоль переменного поперечного сечения: а – расчетная схема, б – квазистатическое представление деформаций

Условия заделки консоли эквивалентны наличию двух голономных связей

$$y|_{x=l} = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=l} = 0. \quad (1)$$

Используя принцип освобождения от связей, консоль будем рассматривать как свободную балку, к правому концу которой приложен изгибающий момент M и перерезывающая сила Q . Свободная балка может, во-первых, перемещаться поступательно вдоль оси y и поворачиваться вокруг оси, перпендикулярной плоскости xu , и, во-вторых, изгибаться – рис. 1 (б). Будем считать, что изгиб балки носит квазистатический характер, т.е. происходит под действием сил инерции поступательного и вращательного движения балки как абсолютно твердого тела, уравновешенных реакциями связей. Интенсивность сил инерции такова:

$$q_{x,t} = \frac{EJ}{l^4} \left(\Lambda_1 f_1 + \Lambda_2 f_2 \right).$$

Здесь E – модуль упругости, $z = x/l$,

$$\Lambda_1 = \frac{M l^2}{EJ}, \quad \Lambda_2 = \frac{Q l^3}{EJ}$$

$$f_1 = \frac{\bar{A}(-z)}{\int_0^1 \bar{A}(-z)^2 dz}, \quad f_2 = \frac{\bar{A}(-z)}{\int_0^1 \bar{A}(-z)^2 dz} - c = \frac{\bar{A}}{\int_0^1 \bar{A} dz},$$

$$\bar{A} = A \int A, \quad c = \frac{\int_0^1 z \bar{A} dz}{\int_0^1 \bar{A} dz}.$$

Изгибающий момент в сечении $x=zl$, вызванный действием сил инерции равен

$$M_{x,t} = \frac{EJ}{l^2} (\Lambda_1 g_1 + \Lambda_2 g_2),$$

где

$$g_k = \int_0^z f_k(-\xi) d\xi, \quad k=1, 2.$$

Интегрируя уравнение упругой линии

$$\frac{EJ}{l^2} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = M, \quad J = \frac{J}{J}$$

получаем

$$y_{x,t} = y_1 + \varphi l - 1 + \Lambda_1 \bar{h}_1 + \Lambda_2 \bar{h}_2. \quad (2)$$

Здесь

$$y_1 = y|_{z=1}, \quad \varphi = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad h_k = \int_z^1 \frac{g_k(-\xi) - z}{J} d\xi, \quad k=1, 2.$$

Отметим, что функции $h_k(z)$ таковы, что

$$\frac{d^2 h_k}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{d^3 h_k}{dz^3} \Big|_{z=1} = 0, \quad h_k|_{z=1} = 0, \quad k=1, 2. \quad (3)$$

Первое слагаемое в формуле (2) соответствует поступательному перемещению свободного стержня как абсолютно твердого тела, а второе – его повороту на угол φ вокруг правого конца. Последние два слагаемые связаны с деформацией изгиба стержня. Кривая прогиба, им соответствующая, как следует из формул (3), удовлетворяет условиям свободного конца при $x=0$ и заделки при $x=l$. Поэтому, если изгибающий момент M и перерезывающая сила Q приложены к неподвижному концу стержня ($y=0, \varphi=0$), то в квазистатике будем иметь

$$y_{x,t} = \Lambda_1 \bar{h}_1 + \Lambda_2 \bar{h}_2. \quad (4)$$

Отсюда следует, что для консоли величины Λ_1 и Λ_2 можно принять за обобщенные лагранжевы координаты.

Отметим, что построенные функции $h_1(z)$ и $h_2(z)$, удовлетворяющие краевым условиям (3), можно рассматривать как удачно выбранные функции для консоли

переменного сечения, позволяющие при рассмотрении ее колебаний использовать метод Рэля–Ритца.

Собственные частоты колебаний данной системы с двумя степенями свободы таковы:

$$p_i = \frac{\omega_i}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}, i=1, 2.$$

Здесь ρ – плотность материала, ω_i – положительные корни уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega_i^2 a_{11} & c_{12} - \omega_i^2 a_{12} \\ c_{12} - \omega_i^2 a_{12} & c_{22} - \omega_i^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

$$a_{ik} = \int_0^1 \bar{A} \bar{h}_i \bar{h}_k dz, \quad c_{ik} = \int_0^1 \frac{g_i g_k}{J} dz, \quad i, k = 1, 2. \quad (6)$$

Формы собственных колебаний, соответствующие частотам ω_i , как следует из выражений (4) и (5), имеют вид

$$X_i = h_1 + C_2 h_2, \quad C_2 = -\frac{c_{12} - \omega_i^2 a_{12}}{c_{22} - \omega_i^2 a_{22}}.$$

Для апробации изложенного метода использовались точные решения для консоли в виде клина ($\bar{A} = z$, $\bar{J} = z^3$) и конуса ($\bar{A} = z^2$, $\bar{J} = z^4$). Расчеты показали, что погрешность определения величины ω_1 составляет для клина 0,1 %, а для конуса – 0,2%. Расчеты проводились также для консолей с другими зависимостями \bar{A} и \bar{J} .

Во **второй главе** внутренние силовые факторы в характерных сечениях стержня рассматриваются как обобщенные лагранжевы координаты. Обоснование такого подхода дается в § 2.1. В § 2.2 рассматриваются продольные колебания свободного стержня длины $2l$ – рис. 2. Разобьем мысленно стержень на две части длины l (стержень 1 и стержень 2) и наложим на данную систему, состоящую из двух свободных стержней, голономную связь, соответствующую условию равенства продольных перемещений в середине стержня (узле). Будем отсчитывать продольную координату x_i , $i=1, 2$, для каждой из половин от ее свободного конца.

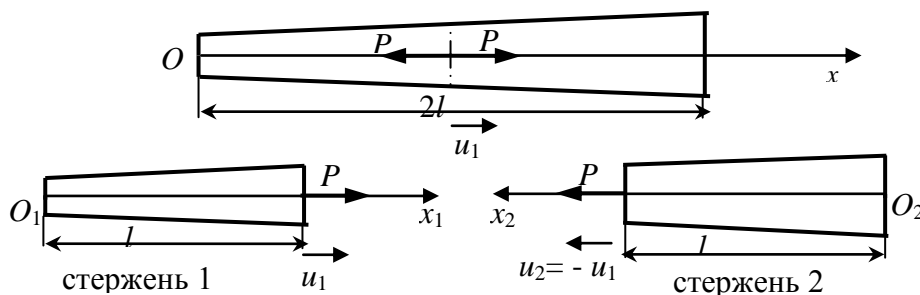


Рис. 2. Разбиение исходного стержня на стержни 1 и 2 при расчете продольных колебаний: *a* – исходный стержень; *б* – стержень 1; *в* – стержень 2

Обозначим через P растягивающее усилие в середине целого стержня (узле) и через u – перемещение узла вдоль оси x . Полагая, что и первый, и второй стержень под действием силы P деформируется квазистатически, смещение

любого сечения обеих стержней сможем выразить через смещение узла u и силу P . Следовательно, величины u и P могут рассматриваться как обобщенные лагранжевы координаты. Данная система с двумя степенями свободы имеет нулевую собственную частоту, соответствующую поступательному перемещению стержней как абсолютно твердых тел, и ненулевую частоту, вычисляемую по формуле

$$p = \frac{\omega}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}.$$

Здесь

$$c_{11} = \int_0^1 \left(\frac{\psi_1^2}{A_1} + \frac{\psi_2^2}{A_2} \right) dz, \quad \bar{A}_1 = \frac{A_1 l}{A}, \quad \bar{A}_2 = \frac{A_2(l-z)}{A}, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

$$\psi_k = \frac{\int_0^{z_1} \bar{A}_k dz}{\int_0^1 \bar{A}_k dz}, \quad a_{11} = \int_0^1 (\bar{A}_1 \varphi_1^2 + \bar{A}_2 \varphi_2^2) dz,$$

$$a_{12} = \int_0^1 (\bar{A}_1 \varphi_1 - \bar{A}_2 \varphi_2) dz, \quad a_{22} = \int_0^1 (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) dz,$$

$$\varphi_k = \int_1^{z_1} \frac{\psi_k}{A_k} dz, \quad k = 1, 2.$$

Собственная форма колебаний, соответствующая этой частоте, запишется в виде

$$X = X^1 \theta - z X^2 - z \theta \llbracket 1 + z \rrbracket,$$

где $X^1 = -\frac{a_{12}}{a_{22}} + \varphi_1$, $X^2 = \frac{a_{12}}{a_{22}} + \varphi_2$, $\theta = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1, & z > 0 \end{cases}$, $z = x/l$.

Как показали расчеты, для стержня в виде клина ($A \llbracket l \rrbracket A = z$) величина $\omega=1,94$, а для конуса ($A \llbracket l \rrbracket A = z^2$) $\omega_1=2,30$. Для стержня постоянной толщины $\omega_1=1,58$, т.е. при сравнении с точным решением $\frac{\pi}{2}$ ошибка составляет 0,7%.

Для свободного стержня, симметричного относительно середины, когда

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

имеем

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad c = \int_0^1 \frac{\psi_1^2}{A_1} dz, \quad a = \int_0^1 \bar{A}_1 \varphi_1^2 dz. \quad (7)$$

Отметим, что частота p свободного стержня длины $2l$ равна в данном случае частоте p продольных колебаний стержня длины l , у которого конец $x=0$ свободен, а конец $x=l$ закреплен. Решение этой задачи по методу Ритца при $\bar{A}_1 = 1+z$ приводится в книге И.М. Бабакова «Теория колебаний». Показано, что

$$\omega = 1,794,$$

где все четыре цифры являются верными. По формуле (7) получаем

$$\omega = 1,814,$$

т.е. погрешность равна 1,1%.

При рассмотрении изгибных колебаний свободного стержня он также разбивается на два стержня длины l – рис. 4.

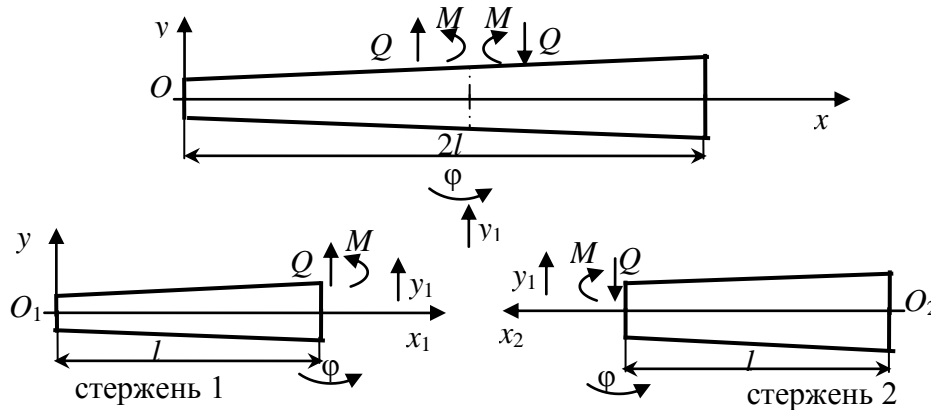


Рис.4. Разбиение исходного несимметричного стержня на стержни 1 и 2 при расчете изгибных колебаний: а – исходный стержень; б – стержень 1; в – стержень 2

Реакциями связей в данном случае являются изгибающий момент M и перерезывающая сила Q . Смещение общего сечения данных стержней вдоль оси y обозначим через y_1 , а угол его поворота через φ (рис. 4). Полагая, что каждый из стержней под действием момента M и силы Q деформируется квазистатически, перемещение вдоль оси y сечения $x_k = z_k l$ k -го стержня, используя формулу (2), представим в виде

$$y_{kz} = y_1 \left[1 - \frac{z_k}{l} \right] \varphi + \Lambda_1 \bar{h}_{1k} \left[1 - \frac{z_k}{l} \right] + \Lambda_2 \bar{h}_{2k} \left[1 - \frac{z_k}{l} \right] \quad (8)$$

$$z_k = x_k / l, \quad k = 1, 2.$$

Функции \bar{h}_{1k} и \bar{h}_{2k} получим, заменяя в формулах, по которым находим соответственно функции h_1 и h_2 , функции \bar{A} и \bar{J} на \bar{A}_k и \bar{J}_k ;

$$\bar{J}_1 = \frac{J}{J}, \quad \bar{J}_2 = \frac{J}{J} \frac{l - z}{l}, \quad 0 \leq z \leq l.$$

Из выражений (7) следует, что построенная модель свободного стержня имеет четыре степени свободы и обобщенными лагранжевыми координатами являются $\Lambda_1, \Lambda_2, y_1$ и φ . Потенциальная энергия изгиба данной модели зависит от двух координат Λ_1 и Λ_2 , а кинетическая энергия – от всех четырех. Поэтому система имеет две нулевые и две ненулевые частоты.

Если стержень симметричен относительно середины, т.е.

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \bar{A}, \quad \bar{J}_1 = \bar{J}_2 = \bar{J},$$

$$h_{11} = h_{12} = h_1, \quad h_{21} = h_{22} = h_2,$$

то первая ненулевая частота p_1 соответствует той форме прогиба, которая симметрична относительно середины. При этом $\varphi = 0$ и $\Lambda_2 = 0$. При второй

частоте p_2 форма прогиба антисимметрична ($y_1 = 0, \Lambda_1 = 0$). Частоты p_1 и p_2 таковы:

$$p_k = \frac{\omega_k}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}, \quad \omega_k^2 = \frac{c_{kk}}{\int_0^1 \bar{A} X_k^2 dz}, \quad k=1, 2.$$

Здесь c_{kk} коэффициенты, задаваемые выражениями (6), а $X_k(z)$ – форма колебаний при частоте p_k . Имеем

$$X_1 = h_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}}, \quad X_2 = h_2 - \frac{a_{12}}{a_{22}} - 1,$$

$$a_{12} = \int_0^1 \bar{A} h_1 dz, \quad a_{22} = \int_0^1 \bar{A} dz,$$

$$a_{12} = \int_0^1 \bar{A} h_2 dz - 1, \quad a_{22} = \int_0^1 \bar{A} dz - 1.$$

Расчеты проводились для случая, когда $\bar{A} = z^{2n}, \bar{J} = z^{4n}$ при тех значениях n , для которых известны точные значения ω_1 . Вычисленные значения ω_1 и ω_2 и их относительные погрешности ε приведены в таблице 1.

Таблица 1. Влияние параметра n на собственные частоты ω_1 и ω_2 ;
 ε – относительная погрешность

n	0	0,25	0,5	0,75	1
ω_1	5,59; $\varepsilon = 0,05\%$	6,97; $\varepsilon = 0,24\%$	8,23; $\varepsilon = 0,34\%$	9,36; $\varepsilon = 0,65\%$	10,33; $\varepsilon = 1,57\%$
ω_2	15,64; $\varepsilon = 1,44\%$	16,31	16,65	16,730	16,58

Для свободного стержня, несимметричного относительно середины, величины ω_1^2 и ω_2^2 являются корнями квадратного уравнения. Явные выражения для ω_1^2 и ω_2^2 не выписывались. Задача решалась численно в пакете «Mathematica».

Расчеты проводились для случая, когда и первый, и второй стержень имеют форму усеченного конуса, т.е. когда $\bar{A}_i = \bar{A}_i + \varepsilon_i \bar{z}_i^2, \bar{J}_i = \bar{J}_i + \varepsilon_i \bar{z}_i^4$. В частности, при $\varepsilon_1 = 0,5, \varepsilon_2 = 0,1$ получаем $\omega_1 = 7,48, \omega_2 = 13,89$.

В конце второй главы рассматриваются изгибные колебания свободного стержня с сосредоточенными массами. Используя аппарат δ -функций Дирака, эту задачу можно свести к предыдущей. Сравнение с точным решением для стержня постоянного сечения с одной сосредоточенной массой на конце показывает, что при любом соотношении между сосредоточенной массой и массой стержня погрешность определения первой частоты не превышает 0,05%.

В третьей главе рассматривается динамика развития трещины в тонком брусе ширины b и толщины $2h$ – рис. 5. В брусе имеется технологический надрез длины L_* , к берегам которого прикладывается импульсная нагрузка p в виде давления, равномерно распределенного по всей площади берега. Размеры b и h предполагаются соизмеримыми друг с другом, а $L_* \gg h$. Толщиной технологического надреза по сравнению с толщиной бруса можно пренебречь. С конца надреза начинает развиваться трещина.

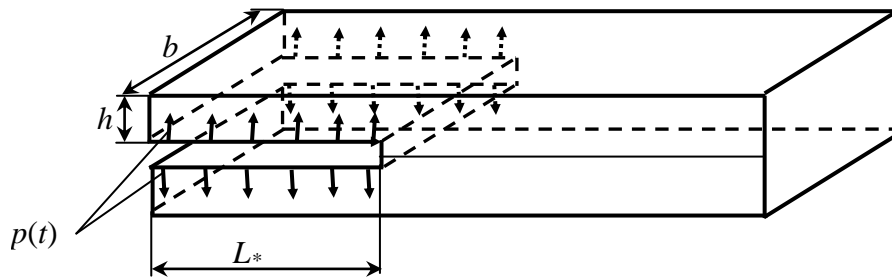


Рис.5. Расчетная схема нагружения берегов трещины в тонком брус

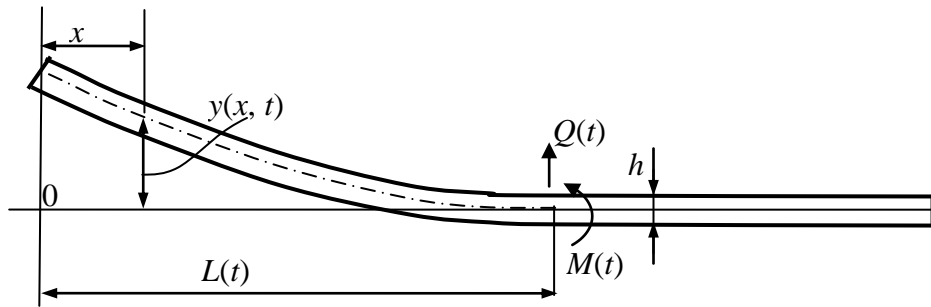


Рис. 6. Расчетная схема распространения трещины в брус

Предположение о сохранении симметрии при развитии трещины позволяет ограничиться рассмотрением одного ее берега. Он рассматривается как консоль, заделанная в вершине трещины. Расчетная схема распространения трещины в брус приведена на рис.6. Используя принцип освобожденности от связей, консоль переменной длины $L \ll \bar{\quad}$ будем рассматривать как свободную балку, к правому концу которой приложен изгибающий момент $M \ll \bar{\quad}$ и перерезывающая сила $Q \ll \bar{\quad}$.

Прогиб берега трещины в нулевом (квазистатическом) приближении обозначим через $y_0 \ll \bar{\quad}, t \ll \bar{\quad}$. Из формулы (2) следует, что данный прогиб при учете того, что консоль имеет постоянное поперечное сечение, представится в виде

$$y_0 \ll \bar{\quad}, t \ll \bar{\quad} = \Lambda_1 \ll \bar{\quad} \bar{h}_1 \left(\frac{x}{L \ll \bar{\quad}} \right) + \Lambda_2 \ll \bar{\quad} \bar{h}_2 \left(\frac{x}{L \ll \bar{\quad}} \right), \quad (9)$$

где

$$h_1 \ll \bar{\quad} = \frac{7}{20} - \frac{z}{2} + \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{10}, \quad h_2 \ll \bar{\quad} = \frac{1}{20} - \frac{z}{12} + \frac{z^4}{12} - \frac{z^5}{20}. \quad (10)$$

Из выражения (9) следует, что при любом $x \in [0, L \ll \bar{\quad}]$ прогиб $y_0 \ll \bar{\quad}, t \ll \bar{\quad}$ однозначно определяется в момент времени t заданием величин Λ_1 , Λ_2 и L . Следовательно, в нулевом (квазистатическом) приближении они могут рассматриваться как обобщенные лагранжевы координаты, но при условии, что $\dot{L} \geq 0$. Таким образом, данная модель ни в квазистатическом, ни в последующих приближениях не позволяет описать смыкание берегов трещины. Полагается также, что расчеты ведутся, пока $y \ll \bar{\quad}, t \ll \bar{\quad} \geq 0$ (см. рис. 6).

Чтобы построить последующие приближения, позволяющие динамически учесть несколько первых собственных форм свободной балки, необходимо

функции h_1 и h_2 , задаваемые выражениями (10), представить в виде ряда по собственным формам колебаний свободной балки.

Прогиб свободной балки длины L может быть представлен в виде

$$y(x, t) = q_0 + \varphi - L + \sum_{i=1}^{\infty} q_i X_i \left(\frac{x}{L} \right), \quad (11)$$

где X_i — балочные функции свободной балки:

$$X_i = \sin \lambda_i z + sh \lambda_i z + A_i \cos \lambda_i z + ch \lambda_i z, \quad A_i = -\frac{sh \lambda_i - \sin \lambda_i}{ch \lambda_i - \cos \lambda_i}.$$

Здесь $\lambda_i = 1, \dots, \infty$ — возрастающая последовательность корней уравнения

$$ch \lambda_i \cos \lambda_i = 1.$$

Первое слагаемое q_0 в выражении (11) соответствует поступательному перемещению свободной балки как твердого тела, а второе — ее повороту, как твердого тела, вокруг конца $x = L$ на угол φ .

Уравнения связей таковы:

$$f_1 = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=L} = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{L} X_i' = 0, \quad f_2 = y(x=L) = q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} q_i X_i = 0, \quad (12)$$

где $X_i' = \left. \frac{dX_i}{dz} \right|_{z=L}$.

В квазистатической постановке задачи считается, что кинетическая энергия системы равна кинетической энергии свободной балки как абсолютно твердого тела заданной фиксированной длины L , т.е. принимается, что она зависит только от обобщенных скоростей \dot{q}_0 и $\dot{\varphi}$.

Потенциальную энергию изгиба представим в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} EJ \int_0^L \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_i \omega_i^2 q_i^2}{2}, \quad M_i = \rho b h L A_i^2, \quad \omega_i^2 = \frac{EJ \lambda_i^4}{\rho b h L^4}. \quad (13)$$

В уравнениях Лагранжа второго рода из-за наличия связей (12) появятся множители Лагранжа, равные соответственно изгибающему моменту M и перерезывающей силе Q в заделке. В квазистатике кинетическая энергия не зависит ни от q_i , ни от \dot{q}_i , поэтому уравнения относительно этих координат таковы

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + M \frac{\partial f_1}{\partial q_i} + Q \frac{\partial f_2}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, \infty.$$

Отсюда

$$M_i \omega_i^2 \hat{q}_i = M \frac{\partial f_1}{\partial q_i} + Q \frac{\partial f_2}{\partial q_i} = \frac{M}{L} X_i' + Q X_i. \quad (14)$$

Здесь \hat{q}_i — значение обобщенной координаты q_i в квазистатике.

Учитывая уравнения связей (12) и выражение (14), кривую прогиба в квазистатике представим в виде

$$y_0(x, t) = \Lambda_1 \bar{h}_1 \left(\frac{x}{L} \right) + \Lambda_2 \bar{h}_2 \left(\frac{x}{L} \right), \quad (15)$$

где

$$\Lambda_1 \equiv \frac{M L^2}{EJ}, \quad \Lambda_2 \equiv \frac{Q L^3}{EJ},$$

$$h_1 \equiv \frac{EJ}{L^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i'}{M_i \omega_i^2} \left(X_i - X_i' - 1 \right),$$

$$h_2 \equiv \frac{EJ}{L^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{M_i \omega_i^2} \left(X_i - X_i' - 1 \right).$$

Используя выражения (9), (11), (12), (15), прогиб консоли в n -ом приближении можно представить в виде

$$y_n(x, t) = y_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i Y_i\left(\frac{x}{L}\right), \quad (16)$$

где $Y_i \equiv X_i - X_i' - 1$. Величины L , Λ_k , $k=1, 2$, \tilde{q}_i , $i=1, \dots, n$, входящие в (16), рассматриваются как обобщенные лагранжевы координаты. Кинетическую и потенциальную энергии вычисленную для прогиба (16) по технической теории балок, обозначим соответственно через T_n и Π_n .

Давление, характеризующее импульсную нагрузку, приложенную к берегам трещины, – см. рис. 5, – задается в виде

$$p \equiv \begin{cases} p_{max} \sin^2\left(\frac{\pi t}{t_*}\right), & 0 \leq t \leq t_* \\ 0, & t_* < t. \end{cases} \quad (17)$$

Обобщенные силы, соответствующие нагрузке (17) таковы:

$$Q_{\Lambda_k} \equiv b \mu_k p L, \quad Q_{\tilde{q}_i} \equiv b \nu_i p L,$$

$$Q_L \equiv b p \left(\left(\sum_{k=1}^2 \mu_k \Lambda_k + \sum_{i=1}^n \nu_i \tilde{q}_i \right) \right),$$

где

$$\mu_k = \int_0^1 h_k dz, \quad \nu_i = \int_0^1 Y_i dz.$$

Постоянная Гриффитса γ связана с работой δA_γ , которая затрачивается на раскрытие трещины на величину δL , соотношением

$$\delta A_\gamma = -\gamma b \delta L.$$

Таким образом, при раскрытии трещины $\dot{L} > 0$ система уравнений Лагранжа второго рода такова:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_n}{\partial \dot{\Lambda}_k} - \frac{\partial T_n}{\partial \Lambda_k} = -\frac{\partial \Pi_n}{\partial \Lambda_k} + Q_{\Lambda_k}, & k = 1, 2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_n}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} - \frac{\partial T_n}{\partial \tilde{q}_i} = -\frac{\partial \Pi_n}{\partial \tilde{q}_i} + Q_{\tilde{q}_i}, & i = 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_n}{\partial \dot{L}} - \frac{\partial T_n}{\partial L} = -\frac{\partial \Pi_n}{\partial L} + Q_L - \gamma b. \end{cases} \quad (18)$$

До начала раскрытия трещины вместо последнего уравнения системы (18) ставится условие:

$$\dot{L} = 0 \quad (19)$$

Данная укороченная система уравнений при $L = L_*$ решается при начальных условиях

$$\tilde{q}_i \overset{\leftarrow}{=} \tilde{\dot{q}}_i \overset{\leftarrow}{=} \Lambda_k \overset{\leftarrow}{=} \dot{\Lambda}_k \overset{\leftarrow}{=} ; k = 1, 2; i = \overline{1, n}.$$

Обобщенная реакция голономной связи (19) равна с обратным знаком той силе Φ , которая стремится раскрыть трещину. Процесс раскрытия начнется тогда, когда сила Φ , вычисленная при найденных значениях $\tilde{q}_i, \tilde{\dot{q}}_i, \tilde{\ddot{q}}_i, \Lambda_k, \dot{\Lambda}_k, \ddot{\Lambda}_k; k = 1, 2; i = \overline{1, n}$ по формуле

$$\Phi = Q_L \Big|_{L=L_*} - \frac{\partial \Pi_n}{\partial L} \Big|_{L=L_*} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_n}{\partial \dot{L}} - \frac{\partial T_n}{\partial L} \right) \Big|_{L=L_*, \dot{L}=0, \ddot{L}=0},$$

достигнет значения γb . Начиная с этого момента, следует переходить к интегрированию полной системы (18).

Условием прекращения раскрытия трещины является уменьшение величины \dot{L} до нуля при $\ddot{L} \leq 0$. Тогда вместо уравнения по координате L снова вводится связь (19). Условие продолжения раскрытия трещины аналогично условию начала ее раскрытия, где вместо L_* подставляется длина трещины в момент окончания последнего раскрытия.

Система (18) интегрировалась в безразмерных переменных. При их введении использовалась величина M_* , равная значению изгибающего момента в вершине трещины, при котором в статике теряется равновесие (начинает развиваться трещина). Величина M_* связана с постоянной Гриффитса γ соотношением:

$$M_* = \sqrt{2\gamma EJb}.$$

Полагая

$$q_* = \frac{M_* L_*^2}{4EJ},$$

безразмерные переменные введем по формулам

$$\tau = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L_*^2} t, \alpha \overset{\leftarrow}{=} \frac{L}{L_*}, \Lambda_k \overset{\leftarrow}{=} \frac{\Lambda_k}{q_*}, \beta_i \overset{\leftarrow}{=} \frac{\tilde{q}_i}{q_*}, k = 1, 2; i = \overline{1, n}.$$

Заметим, что при данных безразмерных переменных система (18) содержит всего два параметра, которые характеризуют внешнюю нагрузку:

$$\bar{p}_{\max} = \frac{bL_*^4}{EJq_*} p_{\max} \text{ и } \tau_* = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L_*^2} t_*.$$

Более того, при $\tau_* \ll 1$, импульсное нагружение можно считать мгновенным, т.е. воздействие можно характеризовать одной величиной $\bar{p}_{\max} \tau_*$, которая характеризует импульс и может рассматриваться как инвариант.

При малом (в сравнении с основными периодами собственных колебаний берега трещины) времени действия нагрузки t_{\max} воздействие можно считать импульсным. При этом можно считать, что к концу воздействия берег движется

поступательно со скоростью $v = \frac{I}{\rho h}$, где $I = \int_0^{t_*} p \overset{\leftarrow}{=} dt$ – импульс воздействия.

Формально приравнивая кинетическую энергию поступательного движения

берега трещины и работу $\gamma b L_*$, необходимую для раскрытия трещины на величину L_* , определяем характерное значение импульса:

$$I^* = \sqrt{2\gamma\rho h}.$$

Для воздействия, заданного в виде (17), характерное значение p_{max}^* таково

$$p_{max}^* = \frac{2I^*}{t_*}.$$

Значение максимальной длины раскрытия трещины можно приближенно определить, полагая, что в момент максимального раскрытия кинетическая энергия, сообщенная берегу при воздействии, полностью переходит в работу раскрытия трещины и потенциальную энергию упругих деформаций берега. Последнюю можно определить в предположении, что момент в вершине трещины при этом равен критическому M_* , а кривая прогиба пропорциональна форме статического прогиба под действием постоянной нагрузки, приложенной к участку берега длиной L_* .

Расчеты проводились при $0,5 \leq \bar{I} \leq 2$, $\bar{I} = I/I^*$, ($2531 \leq \bar{p}_{max} \leq 10124$, $\tau_* = 0,00548$). Для образца со следующими значениями параметров: $h=10$ мм, $L_*=100$ мм, $\rho=1600$ кг/м³, $E=3000$ МПа, $\gamma=3000$ Дж/м², это соответствует $77,5 \text{ МПа} \leq p_{max} \leq 310 \text{ МПа}$, $t_* = 4 \cdot 10^{-6}$ с. При этом $I^* = 310$ Па·с, $p_{max}^* = 155$ МПа. Время воздействия импульса t_* не менялось, а величина p_{max} варьировалась в диапазоне от $0,5 p_{max}^*$ до $2 p_{max}^*$.

Графики зависимости длины трещины $\alpha=L/L_*$ от времени τ при разных значениях p_{max} для $n=0$ и $n=3$ приведены на рис. 7-8. На каждом графике указана максимальная безразмерная длина трещины α_{max} . Расчеты показали, что различия между значениями, полученными в третьем и последующих приближениях, незначительны. Как видно из рис. 7-8, нулевое приближение в основном дает правильное представление о процессе раскрытия трещины.

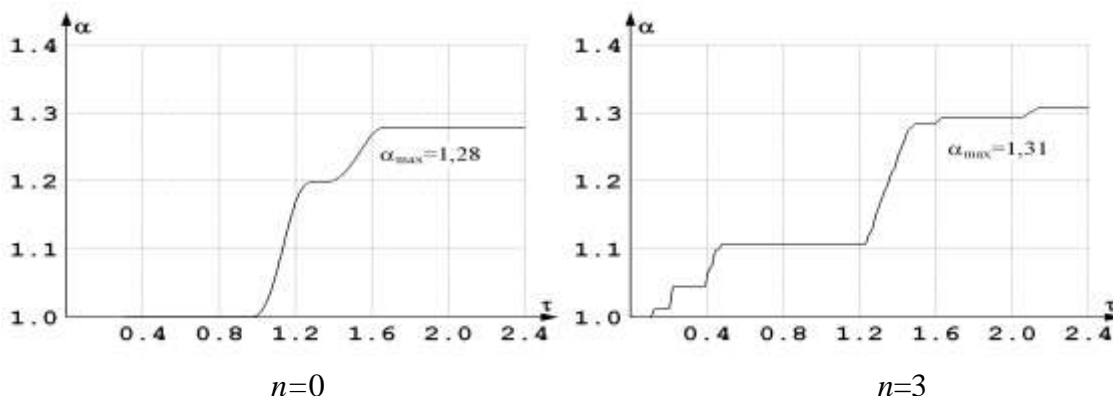


Рис. 7. Зависимость длины трещины α от времени τ . $I = 0,75 I^*$

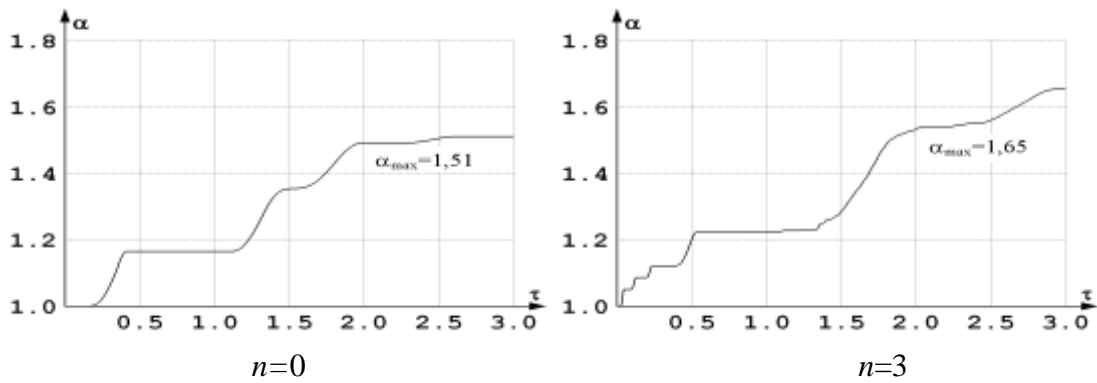


Рис. 8. Зависимость длины трещины α от времени τ . $I = I^*$

Решалась задача по определению минимального порогового значения импульса $I_{\text{пор}}$, при котором имеет место сколь угодно малое развитие трещины. Установлено, что $I_{\text{пор}} = 0,3I^*$. Расчеты показали, что раскрытие трещины начинается не сразу после окончания действия импульсной нагрузки, а приблизительно при $\tau \approx 80\tau_*$. Этот результат согласуется с эффектом запаздывания (см. статью Ю.В.Петрова и др. «Эффект запаздывания старта трещины при пороговых импульсных нагрузках» // Доклады Академии Наук. 2000, т.375. №3. с. 328-330).

Установлено также, что раскрытие трещины носит ступенчатый характер, т.е. состоит из нескольких участков роста трещины ($\alpha' > 0$), разделенных участками, на которых длина трещины не меняется ($\alpha' = 0$). Следует отметить, что вывод о ступенчатом характере раскрытия трещины также подтверждается экспериментальными исследованиями, проводимыми на кафедре теории упругости СПбГУ.

В **заключении** перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

Список работ по теме диссертации

1. Матвеева (Синильщикова) Г.А. Динамика отслоения полубесконечной пластины при заданном законе возрастания прогиба ее свободного края // Международная конференция «Четвертые Окуневские чтения». 22 – 25 июня 2004 г., Санкт-Петербург: Тезисы докладов. – СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2004. – С. 15.
2. Матвеева (Синильщикова) Г.А. Динамика отслоения полубесконечной пластины при заданном законе возрастания прогиба ее свободного края // Международной конференция «Четвертые Окуневские чтения». 22 – 25 июня 2004 г., Санкт-Петербург: Материалы докладов. – Т.1. Теоретическая и прикладная механика. – СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2005. – С. 115–122.
3. Синильщикова Г.А. Использование реакций связей как обобщенных координат при моделировании колебаний упругих систем // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Межвузовский сборник научных трудов. Вып.37. Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2005. – С.146–156.
4. Синильщикова Г.А. Использование квазистатического подхода в динамике стержневых систем // Международная научно-техническая конференция «Вычислительная механика деформируемого твердого тела». 31 января – 2

февраля 2006 г. Москва: Труды. – Т.2. – М.: Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), 2006. – С.383–386.

5. Синильщикова Г.А. Ударное расклинивание тонкого бруса// Международная конференции по механике «Четвертые Поляховские чтения». 7-10 февраля 2006 г., Санкт-Петербург: Тезисы докладов. – СПб.: Изд-во «ВВМ», 2006. – С.215.
6. Зегжда С.А., Синильщикова Г.А. Развитие трещины в тонком бруске при импульсном нагружении // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Вып.3. – 2007. – С. 15–23.

Типография: отдел оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ,
Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д.26
Номер заказа
Тираж 100 экз.