САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЩЕГЛОВА Александра Павловна

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВАРИАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2008

Работа выполнена на кафедре математической физики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент НАЗАРОВ Александр Ильич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор ИВОЧКИНА Нина Михайловна,
	доктор физико-математических наук КОНЬКОВ Андрей Александрович
Ведущая организация:	Владимирский государственный гуманитарный университет

Защита состоится 2 октября 2008 г. в 13 часов на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "..."............2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Архипова А.А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Краевые задачи для квазилинейных уравнений и качественные свойства их решений привлекают большое внимание в последние десятилетия. Исследованиями в этой области занимаются, в частности, такие известные математики, как С.И. Похожаев, В.А. Кондратьев, L. Veron, W.-M. Ni и другие.

Одно из простейших уравнений такой структуры — уравнение Эйлера для функционала, порождаемого теоремой вложения. В диссертации рассматривается задача Неймана для некоторых уравнений такого типа.

Наиболее интересным для исследования является уравнение, порождаемое теоремой вложения $W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$. Это уравнение встречается во многих областях прикладной науки. Например, оно описывает систему реакции-диффузии при морфогенезе. Иследованию этой задачи посвящены работы W.-M. Ni, M. Grossi, I. Takagi и других. Здесь получены тонкие результаты о структуре непостоянных положительных решений (в основном для областей "большого размера"). Однако вопрос о структуре положительных решений для областей "малого размера" исследован недостаточно. Исчерпывающий ответ получен только в одномерном случае в работах А.И. Назарова.

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является исследование условий постоянства решения с минимальной энергией для краевой задачи, порождаемой теоремой вложения Соболева, и изучение эффекта возникновения множественных положительных решений краевой задачи, порождаемой теоремой вложения на границу.

Методика исследования. Использованный в диссертационной работе математический аппарат представляет развитие классических методов исследования квазилинейных эллиптических уравнений. Существенно используются интегральные методы получения априорных оценок решений, теоремы вложения и интерполяционные неравенства для пространств Соболева, метод Лионса для доказательства существования решения в случае предельного показателя вложения. При изучении краевой задачи, порождаемой теоремой вложения на границу, применен метод Нехари.

Научная новизна и значимость работы. Все выносимые на защиту положения диссертационной работы новыми. К наиболее существенным результатам диссертации можно отнести следующие:

— изучение условий непостоянства решения с минимальной энергией краевой задачи, порождаемой теоремой вложения Соболева;

— доказательство постоянства решения с минимальной энергией краевой задачи, порождаемой теоремой вложения Соболева в тонкой цилиндрической области;

— доказательство существования множественных положительных решений краевой задачи, порождаемой теоремой вложения на границу;

— доказательство существования нерадиальных решений краевой задачи, порождаемой теоремой вложения на границу, при суперкритических показателях вложения.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения качественных свойств решений краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений.

Апробация работы и публикации. Результаты работы докладывались на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2004 и 2006 год), на семинаре им. В.И. Смирнова по математической физике (ПОМИ РАН, руководители Г.А. Серёгин и Н.Н. Уральцева)

Основное содержание диссертации изложено в работах [1]–[3]. В работе [1] научному руководителю принадлежит постановка задачи и общая идея метода решения; реализация метода проведена автором. Статья [2] опубликована в издании, включенном в Перечень ВАК на момент публикации (Бюллетень ВАК РФ No. 4 2005 г).

Структура и объем работы. Диссертационная работа, объемом 120 машинописных страниц, состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 41 наименование. Первая и вторая главы включают в себя по 4 параграфа, третья — 5 параграфов.

Работа поддержана грантом поддержки ведущих научных школ НШ-227.2008.1 и грантом РФФИ 08-01-00748.

Содержание работы

Во введении дан краткий обзор исследуемых математических объектов и сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В первой главе изучается вопрос о постоянстве решения с минимальной энергией $\mathcal{E}(u) = \|\nabla u\|_{p,\Omega}^p + \|u\|_{p,\Omega}^p$ задачи

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u &= |u|^{q-2}u \quad \text{в } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \qquad\qquad \text{на } \partial\Omega \end{cases}. \tag{1}$$

Если рассмотреть в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ задачу о нахождении точной константы в теореме вложения $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$:

$$\mu_{p,q}^p = \inf_{u \in W_p^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p}{\|u\|_q^p}, \tag{2}$$

то минимайзер (после домножения на подходящую константу) является решением (1) с минимальной энергией $\mathcal{E}$. Здесь и далее предполагается, что $q \leq p^*$, где p^* — предельный показатель вложения Соболева, то есть инфимум в (2) положителен.

Предложение 1.1. *При $q \leq p$ существует единственное положительное решение задачи* (1), *которое является постоянной функцией.*

Введем нормировку области Ω, то есть замену $\Omega \to \varepsilon\Omega$. Тогда можно считать, что $\operatorname{meas}(\Omega) = 1$, и изучать зависимость от параметра ε решения с минимальной энергией задачи

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \varepsilon^p |u|^{p-2}u &= |u|^{q-2}u \quad \text{в } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \qquad\qquad \text{на } \partial\Omega \end{cases}. \tag{3}$$

Очевидно, что при заданных p и q константа не дает глобального экстремума в (3) при больших ε. Вводя вспомогательные функционалы

$$\mathcal{Q}_{p,q,\varepsilon}(u) \equiv \frac{\|\nabla u\|^p_{p,\Omega} + \varepsilon^p \|u\|^p_{p,\Omega}}{\|u\|^p_{q,\Omega}},$$

$$\mathcal{J}_{p,q,\varepsilon}(u) = \int\limits_\Omega \left(|\nabla u|^p + \varepsilon^p |u|^p\right) - \varepsilon^p \left(\int\limits_\Omega |u|^q\right)^{\frac{p}{q}},$$

можно переформулировать вопрос так: при каких ε константа дает минимум функционалам $\mathcal{Q}_{p,q,\varepsilon}$ и $\mathcal{J}_{p,q,\varepsilon}$.

Теорема 1.1. *Пусть $1 < p < n$ и $q = p^*$. Тогда существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p, n, \Omega)$ такое, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ инфимум $\mathcal{Q}_{p,p^*,\varepsilon}$ достигается.*

Вычисляя второй дифференциал функционала $\mathcal{J}_{p,q,\varepsilon}$ на константе, легко получить

Предложение 1.2. *Пусть $2 < p < q$. Тогда постоянная функция не дает функционалу $\mathcal{J}_{p,q,\varepsilon}$ минимума (даже локального). Следовательно, постоянная функция не является решением* (3) *с минимальной энергией.*

Поэтому содержательным является случай $1 < p \le 2$.

В §1.2 рассматриваются $1 < p < 2$.

Теорема 1.2. *При $1 < p < 2$ и любых $q \in (p; p^*]$, $\varepsilon > 0$ постоянная функция доставляет локальный минимум функционалам $\mathcal{J}_{p,q,\varepsilon}$ и $\mathcal{Q}_{p,q,\varepsilon}$.*

Дальнейшие рассуждения показывают, что при заданном p на полуинтервале $q \in (p; p^*]$ определена функция $\varepsilon = \widehat{\varepsilon}_p(q)$, такая что при $\varepsilon > \widehat{\varepsilon}_p$ постоянная функция не является решением (3) с минимальной энергией, а при $\varepsilon \le \widehat{\varepsilon}_p$ является. Функция $\widehat{\varepsilon}_p(q)$ положительна и $\widehat{\varepsilon}_p(q) \to \infty$ при $q \downarrow p$.

Теорема 1.3. *Функция $\widehat{\varepsilon}_p$ непрерывна на $(p, p^*]$ и строго убывает.*

Наиболее интересным для исследования является случай $p = 2$, который рассмотрен в §1.3. Задача (3) тогда принимает вид

$$\begin{cases} -\Delta u + \varepsilon^2 u = |u|^{q-2} u \quad \text{в} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \end{cases}. \tag{4}$$

Хорошо известно, что решение (4) с минимальной энергией заведомо непостоянная функция при $\varepsilon > \varepsilon_{cr}(q) \equiv \sqrt{\frac{\lambda_{\mathcal{N},\Omega}}{q-2}}$, где $\lambda_{\mathcal{N},\Omega}$ – первое положительное собственное число задачи Неймана

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{в} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Однако вопрос о постоянстве решения с минимальной энергией при $\varepsilon \le \varepsilon_{cr}$ исследован мало. Лишь в одномерном случае А.И. Назаровым доказано, что такое решение постоянно при всех $\varepsilon \le \varepsilon_{cr}$.

Теорема 1.4. *Пусть $q \le 2^*$ и $q < +\infty$, $\varepsilon < \varepsilon_{cr}(q)$. Тогда функция* **1** *дает функционалам $\mathcal{J}_{2,q,\varepsilon}$ и $\mathcal{Q}_{2,q,\varepsilon}$ локальный минимум.*

Так же как в §1.2 доказывается, что на полуинтервале $q \in (2; 2^*]$, $q < +\infty$ определена функция $\varepsilon = \widehat{\varepsilon}(q)$, такая что при $\varepsilon > \widehat{\varepsilon}$ постоянная функция не является решением (4) с минимальной энергией, а при $\varepsilon \le \widehat{\varepsilon}_p$ является. Функция $\widehat{\varepsilon}(q)$ положительна, $\widehat{\varepsilon}(q) \to \infty$ при $q \downarrow p$ и справедлива

Теорема 1.5. *Функция $\widehat{\varepsilon}$ непрерывна на всей области определения и строго убывает.*

Очевидно, что $\widehat{\varepsilon}(q) \le \varepsilon_{cr}(q)$ для всех $q \in (2; 2^*]$. В диссертации показано, что если Ω — асимметричная область общего положения, то $\widehat{\varepsilon}(q) < \varepsilon_{cr}(q)$ для всех $q \in (2; 2^*]$. Кроме того, если Ω — единичный куб в пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n \ge 3$), то при q близких к 2^* снизу $\widehat{\varepsilon}(q) < \varepsilon_{cr}(q)$.

В §1.4 рассматривается функционал, порожденный теоремой вложения $W_p^2(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$. Здесь Ω — плоское риманово многообразие со строго липшицевым краем, а норма в пространстве $W_p^2(\Omega)$ определена так: $\|u\|^p_{W_p^2(\Omega)} = \|\nabla^2 u\|^p_{p,\Omega} + \|u\|^p_{p,\Omega}$. В этом случае ключевым оказывается факт наличия/отсутствия на многообразии Ω линейных функций. Если на Ω существует линейная функция, то при $1 < p < q < p^{**}$ константа не дает соответствующему функционалу минимума, даже локального. Если линейные функции отсутствуют, то справедливы результаты, аналогичные полученным в §1.2 и §1.3.

Во второй главе задача (4) рассмотрена в тонком цилиндре

$\Omega_d = d^{\frac{1}{n}}\omega \times \left(0; d^{-\frac{n-1}{n}}\right)$, $n \geq 3$. Здесь ограниченная область ω строго липшицева и $\operatorname{meas}\omega = 1$, $d \in (0;1)$. При достаточно малых d вычисляем

$$\varepsilon_{cr}(q) = \frac{\pi d^{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt{q-2}}.$$

После замены переменных уравнение (4) превращается в

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\dfrac{1}{d^2}\Delta_x u - u_{yy} + \varkappa^2 u &=& \lambda^2_{q,\varkappa,d} u^{q-1} & \text{в } \Omega_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 & \text{на } \partial\Omega_1, \end{array} \right. \tag{5}$$

где

$$\varkappa = \varepsilon \cdot d^{-\frac{n-1}{n}}, \qquad \lambda_{q,\varkappa,d} = \mu_{2,q,\varepsilon} \cdot d^{-\frac{n-1}{n}},$$

$\Omega_1 = \omega \times (0;1)$, $y \in (0;1)$, $x \in \omega$.

Решение задачи (5) с минимальной энергией является минимайзером функционала

$$\inf_{\substack{u \in W_2^1(\Omega_1),\\ u \neq 0}} Q_{q,\varkappa,d}(u) \equiv \inf \frac{d^{-2}\|u_x\|^2_{2,\Omega_1} + \|u_y\|^2_{2,\Omega_1} + \varkappa^2\|u\|^2_{2,\Omega_1}}{\|u\|^2_{q,\Omega_1}} = \lambda^2_{q,\varkappa,d}$$

и при

$$\varkappa \leq \varkappa_{cr}(q) = \frac{\pi}{\sqrt{q-2}}$$

постоянная функция дает локальный экстремум функционалу $Q_{q,\varkappa,d}$
.

Лемма 2.1. *Пусть $q = 2^*$. Существует $d_0 = d_0(n,\omega)$ такое, что для всех цилиндров Ω_d, $d \leq d_0$ для любого $\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}(2^*)$ инфимум $\mathcal{Q}_{2,2^*,\varepsilon}$ достигается.*

Введем вспомогательный "одномерный" функционал

$$\inf_{\substack{v \in W_2^1(0;1),\\ v \neq 0}} Q_{q,\varkappa}(v) \equiv \inf \frac{\|v'\|^2_{2,(0;1)} + \varkappa^2\|v\|^2_{2,(0;1)}}{\|v\|^2_{q,(0;1)}},$$

нормированный в $L_q(0;1)$ минимайзер которого обозначим $\mathbf{v}$. Известно, что при $\varkappa \leq \varkappa_{cr}$ $\quad \mathbf{v} \equiv 1$.

Цель этой главы — доказать, что при достаточно малых d для функционала $\mathcal{Q}_{2,q,\varepsilon}$ в области Ω_d $\quad \widehat{\varepsilon}(q) \equiv \varepsilon_{cr}(q)$, $q \in (2;2^*]$. Для этого понадобятся априорные оценки решения (5) при $\varkappa = \varkappa_{cr}(q)$, равномерные по q и d. В §2.2 вынесены вспомогательные предложения, а в §2.3 получены необходимые оценки. Доказано, что при $q \in (2; 2^*]$ супремум и W_2^1-норма решения с минимальной энергией задачи (5) равномерно ограничены по q и d, и при $q \in (2; 2+2/n]$ инфимум решения равномерно ограничен по q и d.

Основные результаты этой главы доказаны в §2.4.

Теорема 2.1. *Пусть $q \in (2; 2^*]$, $\varkappa > 0$. Для любой пары $(q, \varkappa)$ существует $d_{loc}(n, \omega, q, \varkappa)$ такое, что для всех $d \le d_{loc}$ минимайзер $\mathbf{v}$ "одномерного" функционала $Q_{q,\varkappa}$ дает локальный минимум функционалу $Q_{q,\varkappa,d}$.*

Теорема 2.2. *Пусть $n \ge 3$. Тогда для любой строго липшицевой области ω существует $d_{cr}(n, \omega)$ такое, что при $d < d_{cr}$ $\widehat{\varepsilon}(q) \equiv \varepsilon_{cr}(q)$, $q \in (2; 2^*]$.*

В третьей главе изучается эффект возникновения множественных положительных решений задачи

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0 & \text{в} \quad B_R \\ |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u; \mathbf{n}\rangle = |u|^{q-2}u & \text{на} \quad S_R \end{cases}. \tag{6}$$

Здесь B_R — шар радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$, $S_R = \partial B_R$. Поскольку при $q \le p$ задача (6) имеет единственное положительное решение (радиальное), то далее считаем $q > p$.

Положительные решения задачи (6) можно искать, минимизируя функционал

$$\mathcal{Q}_{p,q,R}(u) \equiv \frac{\|u\|^p_{W_p^1(B_R)}}{\|u\|^p_{q,S_R}}$$

на различных подпространствах $W_p^1(B_R)$.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathcal{H}$ — замкнутая подгруппа в $O(n)$, и подпространство $L_{\mathcal{H}}$ всех $\mathcal{H}$-инвариантных функций из $W_p^1(B_R)$ компактно вкладывается $L_q(S_R)$. Тогда функционал $\mathcal{Q}_{p,q,R}$ достигает на $L_{\mathcal{H}}$ ненулевого минимума и минимайзер после домножения на подходящую константу дает положительное в B_R обобщенное решение задачи (6) (в дальнейшем будем говорить просто "решение").*

Обозначим $p^\star$ — предельный показатель вложения на границу.

Введем обозначения. Пусть пара чисел $m \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{array}{ll} 1) & m \cdot l + k = n \text{ для некоторого } l \in \mathbb{N}; \\ 2) & m \geq 2; \\ 3) & k = 0 \text{ или } k \geq m. \end{array} \tag{7}$$

Тогда соответствующее разложение пространства $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{R}^n & = & \mathbb{R}^m & \oplus & \ldots & \oplus & \mathbb{R}^m & \oplus & \mathbb{R}^k \\ z & = & (x_1 & , & \ldots & , & x_l & ; & y) \end{array}$$

называется (m, k)-разложением.

Функция u называется m-**радиальной**, если u зависит только от $|x_i|$, $i = 1, \ldots, l$ и (при $k \neq 0$) от $|y|$. Если u инвариантна относительно всех перестановок векторов $x_1, \ldots, x_l$ и (при $k \neq 0$) зависит только от $|y|$, то u называется (m, k)-**симметричной** функцией. Если функция u одновременно m-радиальна и (m, k)-симметрична, то такая функцию называется (m, k)-**радиальной** функцией.

Далее, в §3.2 решения задачи (6) получены в результате минимизации функционала $\mathcal{Q}_{p,q,R}$ на множестве (m, k)-радиальных функций пространства $W_p^1(B_R)$ и доказано, что при достаточно больших R найденные решения будут различны.

Предложение 3.3. *Множество m-радиальных функций из $W_p^1(B_R)$ образует пространство, которое компактно вложено в $L_q(S_R)$ при условии*

$$q < p_m^\star, \qquad \frac{1}{p_m^\star} = \left(\frac{n - m - p + 1}{p(n - m)} \right)_+ . \tag{8}$$

Теорема 3.1. *Пусть $1 < p < q$. Тогда существует $\widehat{R} = \widehat{R}(p, q)$ такое, что при любом $R > \widehat{R}$ для всех пар (m, k), удовлетворяющих условиям (7) и (8), существует (m, k)-радиальное решение задачи (6). Все решения с различными (m, k) неэквивалентны.*

Очевидно, что (8) выполнено при всех $q < \infty$ для $m = n$. Это соответствует тому факту, что задача (6) имеет радиальное решение при любом $q < \infty$. Если $p \geq [(n + 1)/2] + 1$, то для всех $q < \infty$ найдется такое нетривиальное (то есть с $m < n$) (m, k)-разложение, что выполнено (8). Поэтому задача (6) при любом $q < \infty$ имеет нерадиальное решение для достаточно больших R.

В §3.3 функционал $\mathcal{Q}_{p,q,R}$ минимизируется на подпространствах $L_{(2,k,\mathcal{H}_t)}$ всех $(2,k)$-симметричных функций из $W_p^1(B_R)$, $\mathcal{H}_t$-инвариантных по x_i, где $\mathcal{H}_t$ — подгруппа $O(2)$, порождаемая поворотом на угол $2\pi/t$, $t \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.2. *Пусть* $n \neq 3$, $1 < p < \infty$, $p < q < p^\star$. *Для любого* $t_0 \in \mathbb{N}$ *существует* $\widehat{R} = \widehat{R}(p,q,t_0)$, *такое, что при любом* $R > \widehat{R}$ *для всех* k, *удовлетворяющих условию* (7) *с* $m = 2$, *и для всех* $2 \le t \le t_0$ *существует* $(2,k)$-*симметричное,* $\mathcal{H}_t$-*инвариантное решение задачи* (6). *Все решения с различными* (k,t) *различны, если не выполнены равенства*

$$t = 2,\ t' = 4,\ 2k' - k = n \qquad \text{или} \qquad t' = 2,\ t = 4,\ 2k - k' = n.$$

Таким образом получена множественность решений задачи (6) при больших R.

В §3.4 рассматривается "двойственный" случай, когда радиус шара R зафиксирован и меняется показатель q.

Теорема 3.3. *Пусть* n *— четное число,* $n \le p < \infty$. *Тогда для любого* $t_0 \in \mathbb{N}$ *существует* $\widehat{q} = \widehat{q}(p,R,t_0)$ *такое, что при любом* $q \in (\widehat{q};\infty)$ *для всех* $t \le t_0$ *существует* $(2,0)$-*симметричное* $\mathcal{H}_t$-*инвариантное решение задачи* (6). *Все решения с различными* t *неэквивалентны.*

Теорема 3.4. *Пусть* $\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1 \le p < \infty$. *Тогда существует* $\widehat{q} = \widehat{q}(p,R)$ *такое, что при любом* $q > \widehat{q}$ *для всех* m, *удовлетворяющих условию*

$$\max\{2; n-p+1\} \le m \le n/2,$$

существует $(m, n-m)$-*радиальное решение задачи* (6). *Все решения с различным* m *неэквивалентны.*

В §3.5 результаты §3.2 и §3.3 распространены на более общий случай задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(\nabla u) + \alpha_1 u^{p-1} = g(u) & \text{в } B_R \\ \langle a(\nabla u); \mathbf{n}\rangle + \alpha_2 u^{p-1} = f(u) & \text{на } S_R \end{cases}$$

при подходящих условиях на функции $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $g, f : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Назаров А.И.*, *Щеглова А.П.*, О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева // Проблемы математического анализа, Новосибирск, Т.Рожковская, выпуск 27 (2004), стр. 109–136.

[2] *Щеглова А.П.*, Множественность решений одной краевой задачи с нелинейным условием Неймана // Проблемы математического анализа, Новосибирск, Т.Рожковская, выпуск 30 (2005), стр. 121–144.

[3] *Щеглова А.П.*, Задача Неймана для полулинейного эллиптического уравнения в тонком цилиндре. Решения с наименьшей энергией // Записки научных семинаров ПОМИ, СПб, том. 348 (2007), стр. 272–302.

[4] *Назаров А.И.*, *Щеглова А.П.*, О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Владимир, 2004 г. Стр. 147–148.

[5] *Щеглова А.П.*, Множественность решений одной краевой задачи с нелинейным условием Неймана // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Владимир, 2006 г. Стр. 235.

Подписано в печать 01.07.2008. Формат 60x81 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. листов 0,7. Тираж 100 экз. Заказ N 41

ЦОП типографии Издательства СПбГУ
199061, С-Петербург, Средний пр., д. 41.