

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

МАЛЬКОВА Юлия Вениаминовна

**СЛАБО ИСКРИВЛЕННЫЕ ТРЕЩИНЫ  
В УПРУГИХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2008

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики - процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор Греков Михаил Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Нарбут Михаил Александрович

доктор физико-математических наук,  
профессор Господариков Александр Петрович

Ведущая организация: С.-Петербургский государственный  
политехнический университет

Защита состоится "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2008 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании совета Д-212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физ.-мат. наук, профессор

С.А. Зегжда

## Общая характеристика работы

**1. Актуальность темы.** Неоднородные материалы, образованные из сред с разными механическими свойствами, и конструкции из таких материалов широко используются в технике. Это композитные и слоистые материалы, например, металло-керамические, резино-металлические, различные покрытия и т.д. Разрушение таких конструкций обычно происходит из-за наличия трещин и их развития в процессе эксплуатации, поэтому исследование задач механики трещин является актуальным для всех инженерных областей.

Существует обширная литература, посвященная исследованию трещин в двумерных и трехмерных постановках задач. В большинстве работ рассматриваются прямолинейные трещины, в то время как естественно образующиеся трещины обычно имеют слабо искривленную форму. Работы, где рассматриваются криволинейные трещины, в основном относятся к случаю однородных материалов. Задачи теории упругости для криволинейных трещин на границе раздела сред с разными упругими свойствами и вблизи этой границы, которые являются предметом исследования диссертации, изучены недостаточно.

Актуальность темы диссертации подтверждена поддержкой проведенных исследований Российским фондом фундаментальных исследований (05-01-00274, 06-01-00658). Диссертантом были получены гранты Федерального агентства по образованию (А04-2.10-421) и Правительства г. Санкт-Петербурга (М05-2.2К-181).

**2. Целью работы** является решение методом возмущений плоских задач теории упругости для двухкомпонентных тел со слабо искривленными трещинами, расположенными на границе раздела упругих сред с разными механическими свойствами или вблизи этой границы. Необходимо было построить алгоритм для получения решения рассматриваемых задач в любом приближении и исследовать основные параметры, характеризующие напряженное состояние в окрестности вершины трещины.

**3. Методы исследования.** В основе решения поставленных задач лежит метод возмущений в форме, предложенной Грековым М. А. Краевые задачи для каждого приближения сводились к граничным задачам Римана - Гильберта для комплексных потенциалов. В случае межфазной трещины решение этих задач получено в квадратурах, для трещины около границы раздела задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами. Для его решения был применен метод коллокации, реализованный в среде Matlab.

**4. Достоверность работы.** Достоверность полученных решений обеспечивается строгой постановкой задач и применяемым математическим аппаратом. В частных случаях постановок задач были сделаны сравнения с численными результатами других авторов: Грековым М.А., Cotterell В., Rice J.R., Murakami Yu.

#### **5. Результаты, выносимые на защиту**

1. Решена задача о наклонной трещине в однородной плоскости методом возмущений, найдено второе приближение. Проведено сравнение приближенного с точным решением для оценки применимости метода возмущений к подобного рода задачам.

2. Методом возмущений построено решение задачи о слабо искривленной трещине, расположенной на границе раздела двух полуплоскостей из разных материалов. В первом приближении получены зависимости КИН от для основных параметров задачи (модулей упругости, формы трещины, приложенной нагрузки). Проведен анализ влияния этих параметров задачи на КИН и интеграл Райса - Черепанова.

3. Методами возмущений и суперпозиции получено решение задачи для слабо искривленной трещины, расположенной около границы раздела двух полуплоскостей из разных материалов. Интегральное уравнение Фредгольма, к которому сводится задача каждого приближения, преобразовано к системе алгебраических уравнений и решено методом коллокации в среде Matlab. Вычислены КИН в нулевом и первом приближениях. Проанализировано влия-

ние основных параметров задачи: модулей упругости, расстояния трещины от линии раздела, угла наклона трещины и вида нагружения на величину КИН.

**6. Научная новизна.** Основные научные результаты диссертации являются новыми и состоят в применении метода возмущений для задач о криволинейных трещинах в двухкомпонентных средах, позволяющего построить любое приближение.

В задаче о криволинейной межфазной трещине приведен алгоритм нахождения любого приближения. При решении задачи впервые была учтена несамоуравновешенная нагрузка на трещине. Новыми являются и расчеты КИН в первом приближении, позволяющие оценить влияние искривления трещины на их величину.

Задача о криволинейной трещине около линии раздела полуплоскостей раньше не рассматривалась. Применение метода возмущений в сочетании с методом суперпозиции позволило получить решение этой задачи в любом приближении. КИН в первом приближении для криволинейной трещины получены впервые.

**7. Практическая значимость.** Практическую ценность представляют формулы и результаты расчетов КИН для разных форм трещин, позволяющие оценить влияние различных параметров на величину КИН. Эти результаты могут быть использованы в критериях для прогнозирования развития трещин, оценки прочности и разрушения неоднородных материалов с трещинами и применены в разных областях техники.

**8. Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Международной научной конференции "Устойчивость и процессы управления г. С.-Петербург, СПбГУ. 2005 г., на Международных научных конференциях аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость г. С.-Петербург, СПбГУ в 2006 и 2007 г.г., на ежегодных научных конференциях школы академика В.В. Новожилова, г. С.-Петербург, СПбГУ, 2004 - 2006 г.г. Диссертация в целом была доложена на научном семинаре кафедры "Вычислительных методов механики деформи-

руемого тела"СПбГУ (зав. каф. профессор Даль Ю.М.) и на кафедре "Сопротивления материалов" Политехнического университета (зав. каф. профессор Мельников Б.Е.).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в семи работах, приведенных в конце автореферата. Статьи [5, 7] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. В работах [2, 3, 5, 6], опубликованных в соавторстве с М. А. Грековым, соавтор сформулировал задачи и предложил методы их решения, а также обсуждал промежуточные результаты. В работе [7] Малькову В. М. принадлежит постановка задачи и метод решения.

**9. Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 124 стр., общее количество рисунков и графиков – 46, библиография содержит 226 наименований.

#### Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность и цели работы, перечислены выносимые на защиту научные результаты диссертации и дан достаточно полный обзор литературы по теме диссертации. Отмечено, что значительный вклад в исследования в этой области был внесен Мухелишвили Н. И., Савруком М. П., Черепановым Г. П., Морозовым Н.Ф., Грековым М.А., Rice J.R., Sih G.C., Murakami Y., Erdogan F., Comninou M. и другими.

**В первой главе** рассмотрена прямолинейная трещина, повернутая на малый угол относительно базовой [1]. Решение задачи строится методом возмущений. Найдено первое и второе приближения. Цель решения задачи состоит в анализе применимости метода возмущений к такого рода задачам.

Рассмотрим однородную плоскость с прямолинейной трещиной  $L$ . Введем систему координат  $x_1, x_2$  так, чтобы  $L$  образовывала ось  $x_1$  малый угол  $\alpha$ . Ее уравнение имеет вид  $x_2 = (x_1 - 1) \operatorname{tg} \alpha$ . Берега трещины свободны от нагрузки и на бесконечности

$$\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = 0, \quad \sigma_{22}^{\infty} = p, \quad \omega^{\infty} = 0. \quad (1.1)$$

Запишем напряжения и перемещения через комплексные потенциалы Колосова - Мусхелишвили  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + [\Omega(\bar{z}) - \overline{\Phi(z)} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}] e^{-2i\alpha}, \quad (1.2)$$

$$2\mu \frac{d(u_1 + iu_2)}{dz} = \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - [\Omega(\bar{z}) - \overline{\Phi(z)} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}] e^{-2i\alpha}.$$

Применим метод возмущений, представив эти потенциалы и их значения на трещине в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Phi_n(z), \quad \Phi_n^{\pm}(z_c) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\varepsilon^m}{m!} \Phi_n^{\pm(m)}(x_1) (if(x_1))^m \right], \quad (1.3)$$

$$\Omega(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Omega_n(\bar{z}), \quad \Omega_n^{\pm}(\bar{z}_c) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\varepsilon^m}{m!} \Omega_n^{\pm(m)}(x_1) (-if(x_1))^m \right].$$

Подставим разложения (1.3) в (1.2) и граничные условия и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ . Получим последовательность задач Римана-Гильберта, из которой найдем  $\Phi_n(z)$ ,  $\Omega_n(z)$ ,  $n = 0, 1, 2$ . Для правого конца трещины коэффициенты интенсивности напряжений имеют вид

$$K = K_1 - iK_2 = \sqrt{2\pi} \lim_{\xi_1 \rightarrow 1+0} [\sqrt{\xi_1 - 1} (s_{22} - is_{12})]. \quad (1.4)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений также представим в виде разложений по малому параметру. С учетом (1.1) получим

$$K^{(2)} = (K_1 - iK_2)^{(2)} = \sqrt{\pi} p (1 - i\varepsilon - 4\varepsilon^2). \quad (1.5)$$

Точное решение рассматриваемой задачи для КИН имеет вид

$$K_1 = p \sqrt{\pi} \cos^{3/2} \alpha, \quad K_2 = p \sqrt{\pi \cos \alpha} \sin \alpha. \quad (1.6)$$

Сравнив значения приведенных КИН  $k_j = K_j^{(2)} / (p\sqrt{a})$  для точного и приближенного решений видим, что при малых  $\varepsilon$  или углах наклона трещины  $\alpha$  метод возмущений дает достаточно хорошее

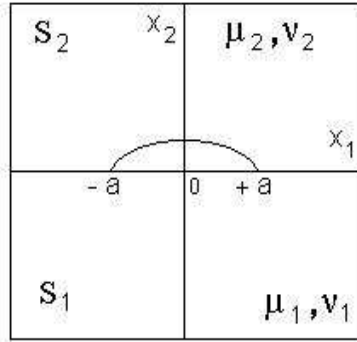


Рис. 1

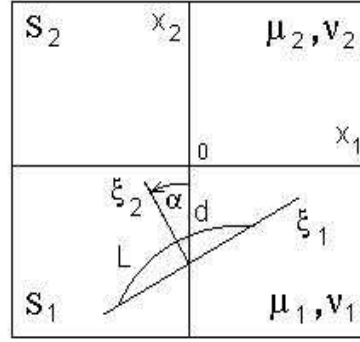


Рис. 2

приближение (при  $\alpha < 12^0$  относительная погрешность КИН во втором приближении  $k_1, k_2$  меньше 10% и 3,5% соответственно).

**Во второй главе** строится решение задачи для слабо искривленной трещины, расположенной на границе раздела двух полуплоскостей  $S_k, k = 1, 2$  с разными механическими свойствами [2, 3, 5, 7] (рис. 1).

Криволинейная трещина  $L$  описывается простой гладкой кривой  $x_2 = \varepsilon g(x_1), x_1 \in [-a, a]$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр,  $|g(x_1)| < a, |g'(x_1)| < M = const$ .

На бесконечности заданы напряжения  $\sigma_{ij}^{k\infty}$  и углы поворота  $\omega^{k\infty}$ , свои для каждой полуплоскости. На берегах трещины имеем условия

$$(\sigma_{nn} + i\sigma_{nt})^+ = p(z_c), \quad (\sigma_{nn} + i\sigma_{nt})^- = q(z_c), \quad (2.1)$$

где  $\sigma_{nn}$  и  $\sigma_{nt}$  – компоненты тензора напряжений в векторном базисе нормали и касательной к трещине,  $z_c = x_1 + i\varepsilon g(x_1)$ . Функции  $p(z_c)$  и  $q(z_c)$  удовлетворяют условию Гельдера. Разложим их в ряды Тейлора

$$p(z_c) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m p^{(m)}(x_1)}{m!} (ig(x_1))^m, \quad q(z_c) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m q^{(m)}(x_1)}{m!} (ig(x_1))^m. \quad (2.2)$$

Комплексные потенциалы Колосова - Мусхелишвили  $\Phi_k(z), \Omega_k(z)$  представим в виде степенных рядов по малому параметру (1.3).



Коэффициенты разложений, то есть функции  $\Phi_{kn}(z), \Omega_{kn}(z)$ , будут найдены как решения граничных задач Римана - Гильберта для прямолинейной трещины соответствующих приближений. Их можно выразить через функции  $h_n(z)$  и  $r_n(z)$ , аналитические во всей плоскости, исключая трещину,

$$h_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{(P_n - Q_n)(t)}{t - z} dt + h_n^\infty,$$

$$r_n(z) - Dh_n(z) = \frac{Y(z)}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{f_n(t) dt}{Y^+(t)(t - z)} + Y(z) R_n(z), \quad (2.3)$$

$$f_n(t) = 0, 5(\mu_2 + \mu_1\kappa_2) [P_n + Q_n + C(P_n - Q_n)](t).$$

$$Y(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left( \frac{z + a}{z - a} \right)^{i\beta}, \quad \beta = +\frac{\ln \delta}{2\pi},$$

где  $P_n(x_1), Q_n(x_1)$  – функции, зависящие от предыдущих приближений и приложенной на трещине нагрузки;  $h_n^\infty = 0, n > 0, h_0^\infty$  зависит от условий на бесконечности;  $C, D, \delta$  – константы, зависящие от модулей упругости полуплоскостей;  $R_n(z) = A_n z + B_n$  – полином, коэффициенты которого выражаются через напряжения на бесконечности и компоненты главного вектора сил на трещине. Предположим, что на трещине действует постоянная нагрузка, одинаковая на обоих берегах  $p(z_c) = q(z_c) = p$ , а на бесконечности заданы напряжения и углы поворота. Тогда КИН в нулевом и первом приближениях имеют вид

$$[(K_1 - iK_2)^{(0)}]^\pm = \pm \frac{2\sqrt{\pi\delta}}{1 + \delta} (1 \mp 2i\beta) 2^{\pm i\beta} (\sigma_{22}^\infty - i\sigma_{21}^\infty - p), \quad (2.4)$$

$$[(K_1 - iK_2)^{(1)}]^\pm = \frac{2\sqrt{\pi\delta}}{1 + \delta} 2^{\pm i\beta} \left[ \frac{(1 + \delta)}{4\pi} (C^2 - 1) [\sigma_{11}^{1\infty} + \sigma_{11}^{2\infty} - 2\sigma_{22}^\infty] I(\pm 1) - \right.$$

$$\left. - \frac{C}{\pi} [J(\pm 1)(\sigma_{22}^\infty - i\sigma_{21}^\infty) + J^*(\pm 1)(\sigma_{22}^\infty + i\sigma_{21}^\infty)] + \right. \quad (2.5)$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi} (1 + \delta)(p - \bar{p}) I(\pm 1) - \frac{C}{\pi} [(p + \bar{p})I(\pm 1) - pJ(\pm 1) - \bar{p}J^*(\pm 1)] \right].$$

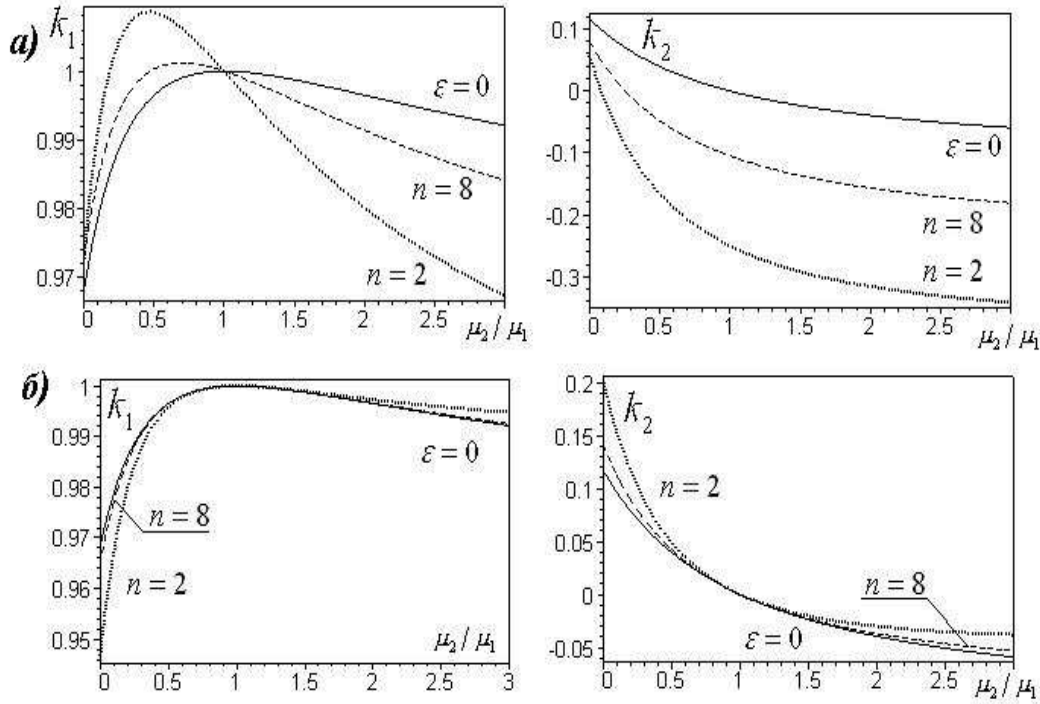


Рис. 3

Здесь и выше  $I(\xi)$ ,  $J(\xi)$ ,  $J^*(\xi)$  – интегралы типа Коши, зависящие от функций  $Y(\xi)$  и  $g(\xi)$ .

Были выполнены расчеты КИН для трещин, описываемых функцией  $x_2 = \varepsilon(1 - \xi^2)^n$ ,  $n = 2, 4, 8, 16$ , при разных видах нагрузки на трещине и на бесконечности. На основании этих расчетов построены графики, иллюстрирующие зависимость КИН от основных параметров задачи.

На рис. 3 представлена зависимость безразмерных значений КИН в нулевом и первом приближениях  $k_1$ ,  $k_2$  от отношения модулей сдвига  $\mu_2/\mu_1$  при значениях коэффициентов Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = 0, 3$  в случае плоской деформации. Зависимости построены для трещин, заданных функциями  $x_2 = \varepsilon(1 - x_1^2)^2$  и  $x_2 = \varepsilon(1 - x_1^2)^8$ , и  $\varepsilon = 0; 0, 5$ . На рис. 3 (а) КИН построены при действии напряжений на бесконечности  $\sigma_{22}^\infty$ , а на рис. 3 (б) трещина находится под действием внутреннего давления.

**В третьей главе** методом возмущений решается задача для

слабо искривленной трещины, расположенной около линии раздела двух полуплоскостей из разных материалов [4,6].

В каждом приближении задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Исследованы решения в нулевом и первом приближениях.

В плоскости  $S$  введем две системы декартовых прямоугольных координат:  $x_1, x_2$  и  $\xi_1, \xi_2$ , вторая система связана с трещиной (рис. 2). Для комплексных переменных  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$  имеем зависимость:  $z = \zeta e^{i\alpha} - id$ , где  $\alpha$  – угол между осями координат,  $d$  – расстояние от середины отрезка между концами трещины до оси  $x_1$ . Уравнение трещины имеет вид  $\zeta_c = \xi_1 + i\varepsilon g(\xi_1)$ .

В координатах  $x_1, x_2$  компоненты напряжений и перемещений обозначим  $\sigma_{ij}$  и  $u_i$ , ( $i, j = 1, 2$ ), соответственно, а в  $\xi_1, \xi_2$  –  $s_{ij}$  и  $v_i$ .

На бесконечности при  $|z| \rightarrow \infty$  заданы напряжения и углы поворота, свои для каждой полуплоскости. На линии сопряжения полуплоскостей при  $x_2 = 0$  имеем условия непрерывности напряжений и перемещений. На берегах криволинейной трещины заданы усилия

$$(s_{nn} + is_{nt})^+ = p^*(\zeta_c), \quad (s_{nn} + is_{nt})^- = q^*(\zeta_c). \quad (3.1)$$

Решение задачи ищем в виде суммы решений двух вспомогательных задач: первой является задача для двухкомпонентной плоскости без трещин со скачками напряжений и перемещений на межфазной линии, второй – задача для однородной плоскости со слабо искривленной трещиной

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_c + (\sigma_{ij})_r, \quad u_i = (u_i)_c + (u_i)_r, \quad z \in S_1, \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_c, \quad u_i = (u_i)_c, \quad z \in S_2.$$

После преобразований граничных условий на линии раздела и на трещине получим соотношения

$$[(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_r]^- (x_1) = \Delta\sigma(x_1), \quad [(u'_1 + iu'_2)_r]^- (x_1) = \Delta u'(x_1). \quad (3.3)$$

$$[(s_{nn} + is_{nt})_c]^+ = p^*(\zeta_c) - p(\zeta_c), \quad [(s_{nn} + is_{nt})_c]^- = q^*(\zeta_c) - q(\zeta_c).$$

Скачки  $\Delta\sigma(x_1)$ ,  $\Delta u'(x_1)$  на линии раздела первой задачи и нагрузка на трещине  $p(\zeta_c)$ ,  $q(\zeta_c)$  второй задачи являются искомыми.

Комплексные потенциалы  $\Phi_k(z)$ ,  $\Omega_k(k)$ ,  $k = 1, 2$ , являющиеся решением первой задачи, записываются через функции  $\Delta\sigma$ ,  $\Delta u$  в виде интегралов типа Коши по бесконечной прямой. Используя это представление и соотношения (3.3), получим

$$M[\Phi_1(z_c), \Omega_1(\bar{z}_c)] = -\frac{1}{2} [1 + i\varepsilon g'(\xi_1)] [(p + q) - (p^* + q^*)](\zeta_c), \quad (3.4)$$

$M$  – линейный оператор,  $z_c = \zeta_c e^{i\alpha} - id$ .

Вторая задача является частным случаем задачи о межфазной трещине. Здесь комплексные потенциалы  $\Phi(\zeta)$ ,  $\Omega(\zeta)$  одинаковы для двух полуплоскостей. Они представляют собой интегралы типа Коши от неизвестной нагрузки на трещине второй задачи.

Уравнение (3.4) требует дополнительных преобразований, чтобы исключить скачки напряжений и перемещений. Они выражаются через комплексные потенциалы второй задачи  $\Phi(\zeta)$ ,  $\Omega(\zeta)$ .

Применим метод возмущений и представим эти комплексные потенциалы и нагрузку на трещине в виде рядов по степеням малого параметра, аналогично формулам (2.2). Подставив эти выражения в уравнение (3.4) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ , получим последовательность интегральных уравнений Фредгольма с непрерывными ядрами относительно одной неизвестной функции  $p_n + q_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$L[\Phi_0(\zeta_1^0), \overline{\Phi_0(\zeta_1^0)}, \Omega_0(\bar{\zeta}_1^0), \overline{\Omega_0(\bar{\zeta}_1^0)}] + \frac{1}{2}(p_0 + q_0)(\xi_1) = \frac{1}{2}(p^* + q^*)(\xi_1) - \frac{1}{2}(\sigma_{11}^{1\infty} + \sigma_{22}^{\infty}) + [\frac{1}{2}(\sigma_{11}^{1\infty} + \sigma_{22}^{\infty}) - (\sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{21}^{\infty})]e^{-2i\alpha}, \quad (3.5)$$

$$L[\Phi_1(\zeta_1^0), \overline{\Phi_1(\zeta_1^0)}, \Omega_1(\bar{\zeta}_1^0), \overline{\Omega_1(\bar{\zeta}_1^0)}] + \frac{1}{2}(p_1 + q_1) = \frac{1}{2}ig(p^* + q^*)' - \frac{1}{2}ig(p_0 + q_0)' - ig'[\frac{1}{2}(\sigma_{11}^{1\infty} + \sigma_{22}^{\infty}) - (\sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{21}^{\infty})]e^{-2i\alpha} - \quad (3.6)$$

$$-\frac{1}{2}ig'(\sigma_{11}^{1\infty} + \sigma_{22}^{\infty}) + F_1[\Phi_0(\zeta_1^0), \overline{\Phi_0(\zeta_1^0)}, \Omega_0(\bar{\zeta}_1^0), \overline{\Omega_0(\bar{\zeta}_1^0)}],$$

$$L[\Phi_n(\zeta_1^0), \overline{\Phi_n(\zeta_1^0)}, \Omega_n(\bar{\zeta}_1^0), \overline{\Omega_n(\bar{\zeta}_1^0)}] + \frac{1}{2}(p_n + q_n) = \frac{1}{2}(ig)^n(p^* + q^*)^{(n)} - \\ - \frac{1}{2}(P_n + Q_n) - F_n[\Phi_{n-1}(\zeta_1^0), \overline{\Phi_{n-1}(\zeta_1^0)}, \Omega_{n-1}(\bar{\zeta}_1^0), \overline{\Omega_{n-1}(\bar{\zeta}_1^0)}], \quad (3.7)$$

где

$$\Phi_n(\zeta) = \frac{Y(\zeta)}{4\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{(p_n + q_n)(t)dt}{Y^+(t)(t - \zeta)} dt + \Phi_n^*(\zeta), \quad (3.8)$$

$$\Omega_n(\zeta) = -\frac{Y(\zeta)}{4\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{(p_n + q_n)(t)dt}{Y^+(t)(t - \zeta)} dt + \Omega_n^*(\zeta),$$

$L, F_n$  – линейные операторы,  $\zeta_1^0 = [\xi_1 e^{-i\alpha} + 2id] e^{-i\alpha}$  и  $P_n(\xi_1), Q_n(\xi_1), \Phi_n^*(\zeta), \Omega_n^*(\zeta)$  – известные функции. После решения этих уравнений становятся известными все искомые функции.

В нулевом приближении имеем задачу для прямолинейной трещины около межфазной линии.

Решение интегрального уравнения Фредгольма (3.5) ищем в виде полинома  $(p_0 + q_0)(t) = \sum_{k=0}^m s_k^0 t^k$  при этом

$$\Phi_0(\zeta) = -\Omega_0(\zeta) = \frac{1}{4\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sum_{k=0}^m s_k^0 \varphi_k(\zeta), \quad (3.9)$$

где  $\varphi_k(\zeta)$  известные аналитические функции.

После этого интегральное уравнение сводится к алгебраическому уравнению с неизвестными коэффициентами  $s_k^0$ . Они определяются методом коллокации, уже применявшемся для решения такого рода интегральных уравнений и показавшем свою эффективность.

Для его реализации была создана программа в пакете Matlab. Требуемая точность вычислений считалась достигнутой, если разница между КИН, вычисленным на заданном и предыдущем шаге

была менее 0,1 %. В нулевом приближении получим

$$[(K_1 - iK_2)^{(0)}]^\pm = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^n s_k^0 \varphi_k(\pm 1) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}i} \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} (F_2 - iF_1).$$

Прочность соединения двух материалов зависит от величины напряжений, действующих на линии раздела. Наличие трещин вблизи этой линии оказывает существенное влияние на величину напряжений. На рис.4 представлены графики нормальных и касатель-

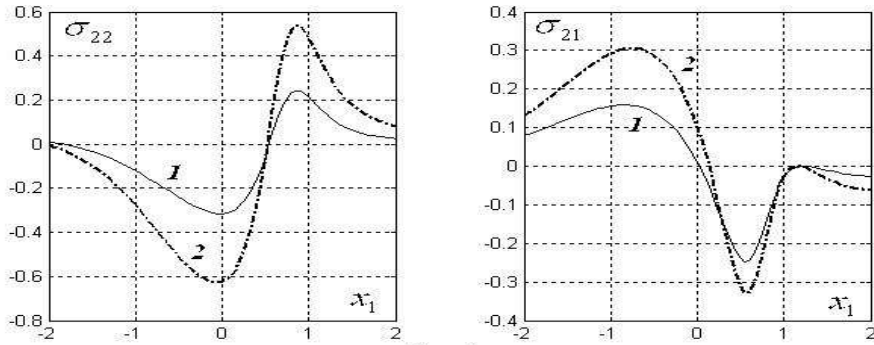


Рис. 4

ных напряжений для прямолинейной трещины при действии внутреннего давления, вычисленных на границе полуплоскостей. Принято  $h = 1.2$  и два значения отношения модулей сдвига  $\mu_2/\mu_1 = 1/3$  (1) и  $\mu_2/\mu_1 = 3$  (2) (плоская деформация).

В первом приближении нужно задать функцию  $g(t)$ , описывающую вид трещины. Положим

$$g(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k, \quad [g(p_0 + q_0 - \bar{p}_0 - \bar{q}_0)]'(t) = \sum_{r=0}^{m+n-1} d_r t^r.$$

КИН в первом приближении имеют вид

$$[(K_1 - iK_2)^1]^\pm = 0,5\sqrt{\pi} \left[ \sum_{k=0}^m s_k^1 \varphi_k(\pm 1) + i \sum_{j=0}^{m+n-1} d_j \varphi_j(\pm 1) \right].$$

Коэффициенты  $s_k^1$  находятся аналогично  $s_k^0$  методом коллокации.

Для трещин вида  $\xi_2 = \pm \varepsilon(1 - \xi_1^2)^2$  в случае базовой трещины, параллельной границе, построены зависимости КИН от отношения модулей сдвига, формы трещины, расстояния от трещины до

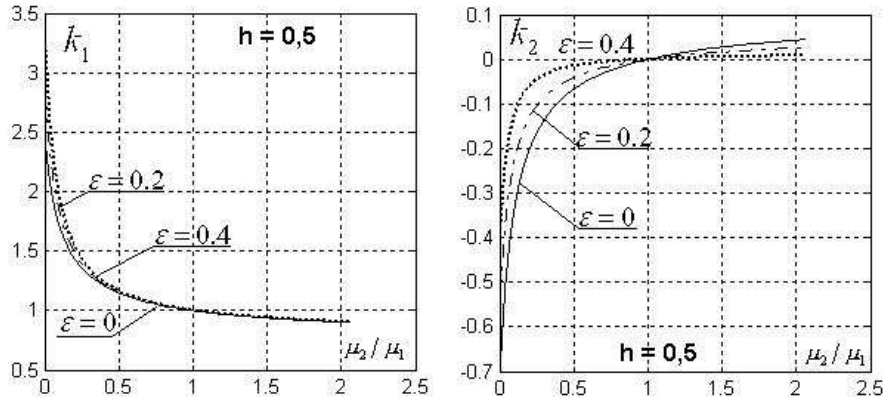


Рис. 5

границы и приложенной нагрузки. На рис. 5 приведены зависимости безразмерных значений КИН нулевого и первого приближений при действии внутреннего давления на трещине, описываемой  $\xi_2 = \varepsilon(1 - \xi_1^2)^2$ , от отношения модулей сдвига  $\mu_2/\mu_1$ . Зависимости построены при  $\varepsilon = 0, 0, 2, 0, 4$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0, 3$  в случае плоской деформации. На рис.6 представлены графики безразмерных

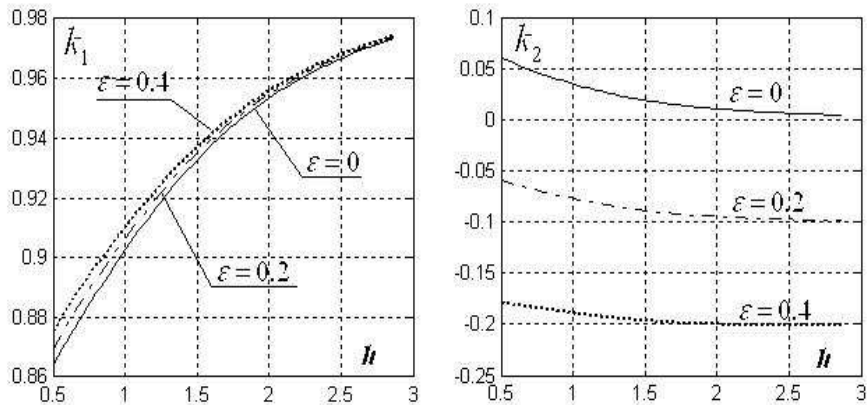


Рис. 6

значений КИН в нулевом и первом приближениях при действии нормальных напряжений  $\sigma_{22}^\infty$  от расстояния трещины до межфазной границы. Отношение модулей сдвига  $\mu_2/\mu_1 = 3$ ,  $\varepsilon = 0, 0, 5$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0, 3$ , плоская деформация.

**В заключении** диссертации подведен итог выполненных исследований.

### Публикации автора по теме диссертации

1. Малькова Ю.В. Метод возмущений в задаче о наклонной трещине// СПб. Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела (Сб. трудов научной школы академика В.В. Новожилова). СПбГУ. 2003. Вып. 7. С. 79-87
2. Греков М.А., Малькова Ю.В. Криволинейная трещина на границе раздела двух сред// СПб. Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела (Сб. трудов научной школы академика В.В. Новожилова). СПбГУ. 2004. Вып. 8. С. 56-71.
3. Греков М.А., Малькова Ю.В. Метод возмущений в задаче о криволинейной межфазной трещине// Труды междунар. научной конференции "Устойчивость и процессы управления". СПб.: СПбГУ. 2005. Т.3. С.1655-1656.
4. Малькова Ю.В. Слабо искривленная трещина около границы раздела двух сред// Труды XXXVII междунар. научной конференции аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость". 2006. С.-Петербург. СПбГУ. С. 167-172.
5. Греков М.А., Малькова Ю.В. Силовые и энергетические характеристики упругого поля у вершины криволинейной межфазной трещины// Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2006. Вып. 3. С. 17-28.
6. Греков М.А., Малькова Ю.В. Контактные напряжения на межфазной границе при раскрытии приграничной трещины// Труды XXXVIII междунар. научной конференции аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость". 2007. С.-Петербург. СПбГУ. С. 141-146.
7. Мальков В.М., Малькова Ю.В. Исследование нелинейной задачи Фламана// Изв. РАН. МТТ. 2006. № 5. С. 68-78.