Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

ЛАНДМАН Ирина Марковна

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2007

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
СМИРНОВ Андрей Леонидович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
НАРБУТ Михаил Александрович

кандидат физико-математических наук
ЛОПАТУХИН Алексей Леонидович

Ведущая организация:
Научно-исследовательский Институт механики
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Защита состоится «____» ______________ 2008 г. в ____ ч. ____ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.232.30 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу:
198504, Старый Петергоф, Университетский пр. д. 28., ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: Санкт-Петербург, Университетская наб., д.7/9

Автореферат разослан «____» ______________ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор С.А.Зегжда

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время тонкостенные упругие оболочечные конструкции находят широкое применение в разных отраслях промышленности: авиастроении и ракетной технике, судостроении, турбиностроении, а также при конструировании железобетонных перекрытий. Популярность такого рода конструкций обеспечивается тем, что они сочетают в себе легкость с высокой прочностью.

Некоторые детали турбин и двигателей, компрессоров и насосов представляют собой вращающиеся пустотелые или заполненные тонкостенные конструкции — «стаканы». Важнейшими задачами являются исследование критических скоростей вращения таких конструкций, а также условий возникновения резонанса при воздействии внешних периодических сил. В обеих задачах необходимо знание спектра собственных частот и форм собственных колебаний конструкций. Эти задачи стимулировали развитие исследований собственных частот колебаний вращающихся тонкостенных оболочек различной геометрии при различных условиях. Колебаниям невращающихся оболочек вращения посвящено немало статей и монографий. Однако динамика вращающихся оболочек изучена недостаточно. Актуальным является также исследование, в котором совместно учитываются инерционные нагрузки и начальные напряжения.

Существует лишь ограниченное число простых задач, имеющих аналитическое решение. С другой стороны, численные методы не всегда дают хорошие результаты (например, в случае малости относительной толщины оболочки), а вычисления требуют большого количества времени. Ввиду отсутствия программного обеспечения, позволяющего проводить асимптотический анализ автоматически, задача проведения полного анализа возлагается целиком на исследователя, что имеет ряд недостатков (например, большие затраты времени на проведение анализа, недостаточная надежность и необходимость учета влияния человеческого фактора). Все вышеперечисленные обстоятельства делают задачу разработки алгоритмического и программного обеспечения для автоматизации решения задач, использующего асимптотические методы, актуальной.

Целью диссертации является получение асимптотических формул для главных членов собственных частот колебаний вращающихся оболочечных конструкций с учетом влияния на них вращения оболочки и вызванных им начальных напряжений. Для получения указанных формул необходимо разбить пространство параметров на области принципиально разных асимптотических представлений решений, т.е. построить асимптотические портреты для систем дифференциальных уравнений, описывающих колебания оболочек. Построение асимптотических разложений для собственных частот включает в себя нахождение с требуемой точностью корней характеристического уравнения в произвольной области параметров, а также упрощение частотного определителя. Для решения указанных задач в работе последовательно применяются методы вычислительной геометрии.

Методы исследования. В диссертации используется метод асимптотического интегрирования уравнений колебаний тонких оболочек, разработанный А. Л. Гольденвейзером, В. Б. Лидским и П. Е. Товстиком. Особенностью решения рассматриваемых в диссертации задач является создание и использование алгоритмов вычислительной геометрии для разработки метода нахождения корней характеристических и частотных уравнений. Эти алгоритмы в одномерном случае представляют собой метод диаграммы Ньютона, а в пространстве произвольной размерности – метод многогранника Ньютона. Приближенные решения строятся в виде асимптотических рядов по малым параметрам задач. Используются методы численного интегрирования начально-краевых задач, в частности, метод ортогональной прогонки, предложенный С. К. Годуновым.

Научная новизна. Новыми являются полученные асимптотические формулы для определения главных членов собственных частот колебаний вращающихся оболочек с учетом влияния на них вращения оболочки и вызванных им начальных напряжений. Основная научная новизна работы состоит в применении методов вычислительной геометрии для изучения характеристического и частотного уравнений. Новым также является использование методов компьютерной алгебры для построения формального асимптотического решения и для решения краевой задачи. Разработанный алгоритм позволяет построить асимптотические портреты для уравнений осесимметричных и неосесимметричных колебаний вращающихся цилиндрических оболочек и осесимметричных колебаний вращающихся конических оболочек. В частности, этот алгоритм позволил впервые найти асимптотические формулы для собственных частот в первом приближении, близких к точке сгущения для колебаний вращающейся цилиндрической оболочки, собственные частоты в случае, когда корни характеристического уравнения — кратные, формулы для частот конической оболочки и исследовать влияние вращения и начальных напряжений на частоты колебаний.

Достоверность полученных результатов. Все задачи рассматриваются в рамках классических моделей механики на основе строгих методов математической физики, теории дифференциальных уравнений, асимптотического анализа и методов вычислительной геометрии. Достоверность подтверждается соответствием результатов, полученных по асимптотическим формулам, с результатами численного решения задач, а также сравнением с результатами других авторов.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные результаты могут быть применены при проектировании и моделировании широкого класса задач механических систем, частью конструкций которых являются вращающиеся цилиндрические и конические оболочки, в частности, при расчетах частот колебаний различного вида вращающихся оболочек. Результаты исследования могут представлять интерес для специалистов, занимающихся проектированием тонкостенных конструкций в различных областях техники: авиа и ракетостроении, судостроении, строительстве, машиностроении и приборостроении.

Формулы, полученные асимптотическими методами, могут быть полезны также с теоретической точки зрения, т.к. впервые методы вычислительной геометрии были применены для анализа уравнений колебаний некоторых вращающихся оболочек вращения, что позволило получить в первом приближении аналитические выражения для собственных частот.

Апробация работы. Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались на всероссийских и международных конгрессах и симпозиумах: Всероссийском съезде по промышленной и прикладной математике (ВСППМ‘2005, Санкт-Петербург, Россия, 2005), Международной научной конференции по механике «Третьи Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2003), 17-ом Канадском Конгрессе по Прикладной Механике (CANCAM, Гамильтон, Канада, 1999), Юго-Восточной конференции по прикладной механике (SECTAM XX, Алабама, США, 2000), где работа [10] была отмечена третьей премией конкурса студенческих работ, на Форуме Канадского Инженерно-Механического общества (CSME-Forum, Монреаль, Канада, 2000), 3-ей конференции Массачусетского Технологического Университета по вычислительной гидродинамике и механике деформируемого твердого тела (The 3rd MIT Conference on Solid and Fluid Mechanics, Кэмбридж, США, 2005), Международном симпозиуме по изучению тенденций в применении математических методов в механике (STAMM, Вена, Австрия, 2006).

Результаты диссертации обсуждались на научных семинарах кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ, семинаре «Компьютерные методы в механике сплошной среды» (ПГУПС, Санкт-Петербург, 2006) и семинаре «Упругость и пластичность» под руководством профессора Р. А. Васина (НИИ механики МГУ, Москва, 2007).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-10]. Работа [10] опубликована в журнале, рекомендованном ВАК (Перечень. Бюллетень ВАК, 2007, №1, с. 3-39). В работах [1, 3, 9], опубликованных в соавторстве с А. Л. Смирновым и Е. М. Хасегану, диссертанту принадлежит реализация (при помощи вычислительной системы Mathematica) алгоритма построения формального асимптотического решения задач, разработанного совместно со А. Л. Смирновым, а также проведение асимптотического анализа свободных колебаний невращающихся тонких цилиндрических оболочек. Постановка задачи в этих работах принадлежит А. Л. Смирнову и Е. М. Хасегану. В работах [4, 5] автором диссертации проведено исследование характеристических уравнений свободных колебаний невращающихся тонких цилиндрических оболочек, построены основные асимптотические портреты, найдены все укороченные уравнения и решены краевые задачи для основных граничных условий. Также в этих работах диссертанту принадлежит основная идея обобщения алгоритма на случай четырех и более параметров, получены основные асимптотические портреты для вращающейся оболочки. Постановка задачи, а также численные расчеты при помощи вычислительной системы ANSYS принадлежат А. Л. Смирнову.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из трех глав, введения и приложения. Общий объем диссертации составляет 136 страниц, включая 34 рисунка, 15 таблиц и 10 страниц библиографии, содержащей 96 наименований.

Основные результаты, выносимые на защиту.

- Предложен алгоритм, основанный на построении выпуклой оболочки точечного множества (многогранник Ньютона), позволяющий находить решения характеристических уравнений, содержащих большие и малые параметры.

- Разработан алгоритм нахождения асимптотического решения уравнений колебаний вращающихся тонких оболочек, позволяющий, в частности, построить асимптотический портрет, то есть разбиение пространства параметров системы дифференциальных уравнений, в каждой из областей которого асимптотические решения имеют одинаковое представление. Такие асимптотические портреты были построены для

  – осесимметричных и неосесимметричных колебаний вращающихся цилиндрических оболочек;
  – осесимметричных колебаний вращающихся конических оболочек.

- Получены приближенные асимптотические формулы для собственных частот колебаний вращающихся оболочек для разных областей параметров и для разных граничных условий, хорошо согласующиеся с результатами численных расчетов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, указывается цель и методы исследования. Приведен краткий обзор литературы по теме диссертации. Отмечено, что значительный вклад в фундаментальные исследования в этой области был внесен В. З. Власовым, А. Л. Гольденвейзером, А. И. Лурье, Х. М. Муштари, В. В. Новожиловым, Э. И. Григолюком и другими учеными, создавшими собственные научные школы. Вращающиеся оболочки вращения впервые были рассмотрены G. H. Bryan, а затем в трудах отечественных и зарубежных ученых: Д. М. Климова, В. Ф. Журавлева, Ю. С. Воробьева, С. И. Детистова, В. Г. Вильке, Н. Е. Егармина, А. Л. Смирнова, П. Е. Товстика, R. A. DiTaranto, S. C. Huang, W. Soedel, K. Hayashi, M. Lessen, A. Srinivasan, G. Lauterbach, J. Padovan и других. Методы асимптотического интегрирования систем дифференциальных уравнений, описывающих колебания оболочек были развиты в работах А. Л. Гольденвейзера, В. Б. Лидского, П. Е. Товстика, А. Г. Асланяна, A. H. Nayfeh, F. W.J. Olver, В. З. Власова и других, а методы вычислительной геометрии – в работах M. I. Shamos, F. P. Preparata, R. L. Graham, J. O'Rourke, C. B. Barber и других. Во введении также сформулирована цель работы, кратко описана структура диссертации и содержание последующих глав, охарактеризована ее научная новизна, а также теоретическая и практическая ценность, перечислены основные результаты, выносимые на защиту.

В первой главе приведен подробный вывод системы уравнений колебаний тонких замкнутых вращающихся оболочек вращения с прямыми краями. Общая система выведена с помощью принципа Гамильтона в безразмерных ортогональных криволинейных координатах. При этом используются гипотезы, характерные для теорий типа Кирхгофа – Лява, и соотношения упругости Новожилова – Балабуха. Раздел 1.4 посвящен определению плотности энергии деформации и нахождению начальных напряжений. Полученная система, записанная в перемещениях, в матричном виде имеет вид

$$LU = 0,$$

где

$$L = L_0 + \mu^4 L_\mu - \left(1 - \nu^2\right) \left(\lambda^2 I + 2\lambda\Omega L_C + \Omega^2 \left(L_e + L_{T_1} + L_{T_2}\right)\right),$$

$U = (u, v, w)$, где u, v, w — компоненты вектора перемещений.

В вышеприведенной системе L_0 — безмоментный оператор, связанный с растяжением – сжатием оболочки, L_μ — моментный оператор, связанный с изгибом – кручением оболочки, I — единичная матрица, L_C — оператор, связанный с ускорением Кориолиса, L_e — оператор, связанный с центробежными силами, а операторы L_{T_1} и L_{T_2} порождены осевым и окружным начальными напряжениями. Здесь ν — коэффициент Пуассона, $\mu^2 = \frac{h_*}{R\sqrt{12}}$ — основной параметр относительной толщины оболочки, где h_* — толщина оболочки, R — радиус оболочки. Для произвольных оболочек вращения оператор

$$L_C = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

где $\theta\left(s\right)$ — угол между вектором нормали к срединной поверхности и осью симметрии, s — длина дуги меридианы, а оператор $L_\Omega = L_e + L_{T_1} + L_{T_2}$, зависящий от граничных условий, может быть записан в виде

$$L_\Omega = \begin{pmatrix} -m^2 & -2m\cos\theta & 0 \\ -2m\cos\theta & -m^2 & 2m\sin\theta \\ 0 & 2m\sin\theta & -m^2 \end{pmatrix} + PL_P \ ,$$

где m — число волн по параллели. Рассматриваются граничные условия трех видов: шарнирное опирание на обоих краях, жесткая заделка и симметричное граничное условие, названное особым, при котором в условии шарнирного опирания условие $T_1 = 0$ (где T_1 — начальное напряжение в осевом направлении) заменено на $u = 0$. Величина P отлична от нуля только для граничных условий, в которых на обоих краях $u = 0$ и определена для произвольной оболочки вращения, в частности, для цилиндрической оболочки $P = \nu$.

Решения $U = (u, v, w)$ ищутся в форме «бегущих волн», а амплитудные функции $U(s), V(s), W(s)$ представлены в экспоненциальной форме, например $U = U_0 e^{ps}$. При этом характеристическое уравнение для определения корней p имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N} P_i\left(p; \lambda, m, \mu, \Omega, s\right) = \sum_{i=1}^{N} p^{k_i} \mu^{\alpha_i} \lambda^{\beta_i} m^{\gamma_i} \Omega^{\pi_i} a_i(s) = 0.$$

Параметрами в задаче колебаний вращающихся тонких цилиндрических оболочек являются основной параметр относительной толщины оболочки μ, λ — частота колебаний, m — число волн в окружном направлении, Ω — угловая скорость вращения и для конической оболочки — параметр конусности $\cos\theta$.

Подробный анализ сравнения уравнений, полученных автором диссертации и другими авторами, представлен в конце первой главы.

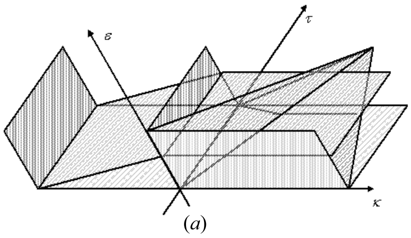
Во второй главе рассматривается геометрический метод исследования характеристического уравнения, полученного в первой главе. В случае задач с одним малым параметром — это метод диаграммы Ньютона, а в многомерном случае — метод многогранника Ньютона. Этот метод дает возможность находить корни характеристического уравнения с помощью символьных вычислений. Назовем изображающими точками точки M_i в пространстве $(k, \alpha, \beta, \gamma, \pi)$. Каждой точке приписан ее «вес» a_i, с которым данный член входит в характеристическое уравнение. Главные члены этого уравнения определяются изображающими точками, лежащими на выпуклой оболочке точечного множества в пространстве $(k, \alpha, \beta, \gamma, \pi)$. В случае задачи колебания вращающейся тонкой оболочки вращения главными будут являться те члены уравнения, изображающие точки которых лежат на «нижней части» выпуклой оболочки, т.е. те точки, которые видны из точки с координатами $(0, -\infty, 0, 0, 0)$.

В завершение второй главы описываются методы упрощения характеристического уравнения, с помощью которых получено решение характеристических уравнений для осесимметричных ($m = 0$) и неосесимметричных ($m \neq 0$) колебаний невращающейся ($\Omega = 0$) и вращающейся ($\Omega \neq 0$) цилиндрической оболочки. С помощью средств вычислительной геометрии получены решения в различных областях пространства параметров: двумерного (μ, λ), трехмерного (μ, λ, m) и четырехмерного $(\mu, \lambda, m, \Omega)$. Главные члены характеристического уравнения определяются гранями выпуклой оболочки множества точек в пространстве степеней параметров. Для каждой грани главные члены полинома будут разными. Каждая грань определяет соотношение между параметрами λ, m, Ω (или $\cos\theta$) и основным малым параметром μ, которое можно выразить с помощью соотношений $\lambda = \lambda_0\mu^\kappa$, $m = m_0\mu^{-\tau}$ и $\Omega = \Omega_0\mu^\varepsilon$ (или $\cos\theta = \cos\theta_0\mu^\tau$). На параметры накладываются следующие ограничения: $-2 < \kappa < \infty$, $0 \leq -\tau < 2$, $\lambda_0 > 0$, $m_0 \geq 0$, $0 < \varepsilon < \infty$. Набор точек $\{\kappa_i, \tau_i, \varepsilon_i\}$, в которых меняется структура выпуклой оболочки, назовем критическими точками, в каждой из которых можно построить решение укороченного уравнения, т.е. решение уравнения, включающего только главные члены. Для того чтобы построить решения для промежуточных значений $\{\lambda, m, \Omega\}$ (или $\{\lambda, \cos\theta, \Omega\}$ для осесимметричных колебаний конической оболочки), разделим полную область изменения параметров (λ, m, Ω) на подобласти, расположив критические точки $\{\kappa_i, \tau_i, \varepsilon_i\}$ на рассматриваемой полной области значений параметров (λ, m, Ω). Для любых $\{\lambda, m, \Omega\}$ внутри каждой подобласти структура выпуклой оболочки не изменяется, а, следовательно, вид укороченных уравнений сохраняется. Подобного рода разбиения пространства $\{\kappa, \tau, \varepsilon\}$ на подобласти критическими точками, многоугольниками назовем асимптотическим портретом (термин предложен Б. Н. Квасниковым). Таким образом, зафиксировав только одно произвольное значение величин $\{\lambda, m, \Omega\}$ внутри каждой из подобластей, можно получить значения корней и собственных векторов внутри каждой подобласти. В этой главе найдены асимптотические портреты для случаев осесимметричных и неосесимметричных колебаний невращающейся и вращающейся цилиндрической оболочки, а также для осесимметричных колебаний конической оболочки (см. рис. 1а). На рисунке 1б изображен асимптотический портрет для осесимметричных колебаний вращающейся цилиндрической оболочки в двумерном пространстве (κ, ε), полученный предельным переходом при $\cos\theta \to 0$ асимптотического портрета (рис. 1а). Отдельно рассмотрены случаи, когда параметр собственной частоты близок к точке сгущения частот $\lambda \sim 1$.

В третьей главе результаты первой и второй глав используются для построения формального асимптотического решения в задачах о колебаниях тонких цилиндрических и конических оболочек.

Третья глава состоит из двух частей, первая из которых касается осесимметричных колебаний оболочек, а вторая — неосесимметричных.

В первой части главы найдены низкие частоты осесимметричных колебаний цилиндрических вращающихся оболочек для трех типов закрепле-



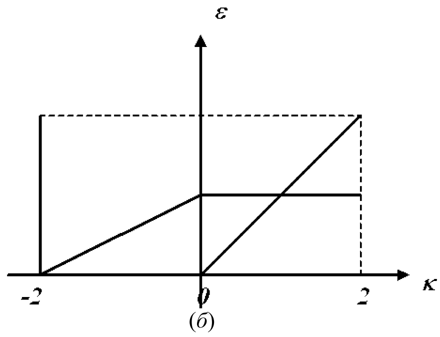


Рис. 1. Асимптотический портрет (а) в пространстве параметров$(\kappa,\tau,\varepsilon)$ для осесимметричных колебаний вращающейся конической оболочки. Асимптотический портрет (б) в пространстве(κ,ε) для осесимметричных колебаний вращающейся цилиндрической оболочки (или конической оболочки при $\cos\theta\to 0$).

ния краев: жесткой заделки, шарнирного и особого опирания. Показано, что способ закрепления краев оболочки и ее вращение не влияют на главные члены собственных частот осесимметричных колебаний.

В задаче о высокочастотных колебаниях для всех трех видов рассматриваемых граничных условий две серии частот одинаковые

$$\lambda_k^{(1)}=\frac{\pi k}{\sqrt{1-\nu^2}L},\ \lambda_k^{(2)}=\frac{\pi k}{\sqrt{2\,(1+\nu)}L},$$

третья серия для жесткой заделки, шарнирного опирания и особого опирания краев имеет вид, соответственно

$$\lambda_k^{(3)}=\left(\frac{\pi\,(2k+1)\,\mu}{2L\sqrt[4]{1-\nu^2}}\right)^2,\ \lambda_k^{(3)}=\left(\frac{\pi k\mu}{\sqrt[4]{1-\nu^2}L}\right)^2,\ \lambda_k^{(3)}=\frac{\pi k\sqrt{\nu}\Omega}{L}.$$

Следовательно, для высоких частот способ закрепления концов оболочки влияет на собственные частоты колебаний, а для особого типа опирания на собственные частоты также влияет вращение оболочки.

Исследование частот, близких к точке сгущения $\lambda\approx 1$, начато с анализа осесимметричных колебаний невращающихся цилиндрических оболочек с жестко закрепленными краями. Для критической точки $\left(\kappa=\frac{4}{3}\right)$ найденное уравнение для нахождения собственных частот совпадает с полученными другими авторами. Для $0<\kappa<\frac{4}{3}$ в диссертации полученно новое приближенное уравнение для определения неизвестного параметра $\tilde{\lambda}=\lambda-1$:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{L\tilde{\lambda}^{1/4}\left(1-\nu^2\right)^{1/4}}{\mu}\right)=\frac{2\mu\nu}{\tilde{\lambda}^{3/4}\left(1-\nu^2\right)^{1/4}}.$$

Рассмотрены частоты осесимметричных колебаний вращающихся цилиндрических оболочек с особым случаем закрепления краев, близкие к точке сгущения $\lambda \approx 1$. Для них получены две серии собственных частот на критическом сегменте $\tau = \kappa$

$$\lambda_k^{(1)} = 1 + \tilde{\lambda} = \frac{\sqrt{2}\pi k}{\sqrt{1+\nu L}}, \ \lambda_k^{(2)} = 1 + \tilde{\lambda} = 1 + \frac{\left(\frac{\pi k}{L}\right)^4 \nu\Omega^2 - \nu^2}{\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2}.$$

Для конических оболочек рассмотрена задача нахождения низких частот осесимметричных колебаний оболочек с жесткими и шарнирно опертыми краями. Для обоих типов закрепления краев получена следующая серия частот:

$$\lambda_k = \sqrt{\left(\left(\frac{2\pi k R\left(1-\nu^2\right)}{L}\right)^2 + \cos^2\theta\right)\frac{1}{4R^2\left(1-\nu^2\right)^2}}.$$

В предельном случае, $\cos\theta = 0$, получаем серию частот для цилиндрической оболочки.

Первую часть третьей главы завершает параграф, в котором методом ортогональной прогонки интегрируются уравнения колебаний цилиндрических оболочек с жестко закрепленными краями и с параметрами $L = 3$, $\nu = 0.3$, $m = 0$, $\Omega = \mu^1$. С ростом μ увеличивается точное значение λ, а также ошибка его нахождения. Для $\mu = 0.05$ проведено сравнение асимптотических и численных значений низких и высоких частот, а также частот, лежащих вблизи точки сгущения.

Для неосесимметричных колебаний цилиндрических оболочек решены несколько характерных задач, асимптотические портреты которых найдены в главе 2 (см. рис. 2). Так, в случае шарнирного опирания краев для критической области $\kappa = 2 - 2\tau$ найденные частоты не зависят от Ω; а для критической области $\varepsilon = \kappa + \tau$ в случае шарнирного опирания краев получаем следующую формулу для нахождения параметра собственной частоты:

$$\lambda_k^2 = \left(\frac{\pi k}{Lm}\right)^4 + \frac{m^4\mu^4}{1-\nu^2} + m^2\Omega^2.$$

Корни характеристического уравнения этой задачи при симметричных граничных условиях типа шарнирного опирания имеют вид $p_k = \frac{\pi k}{L}$. В дальнейшем будем называть это решение точным. Эта задача также решена численно, и в диссертации произведено сравнение точных (для поло-

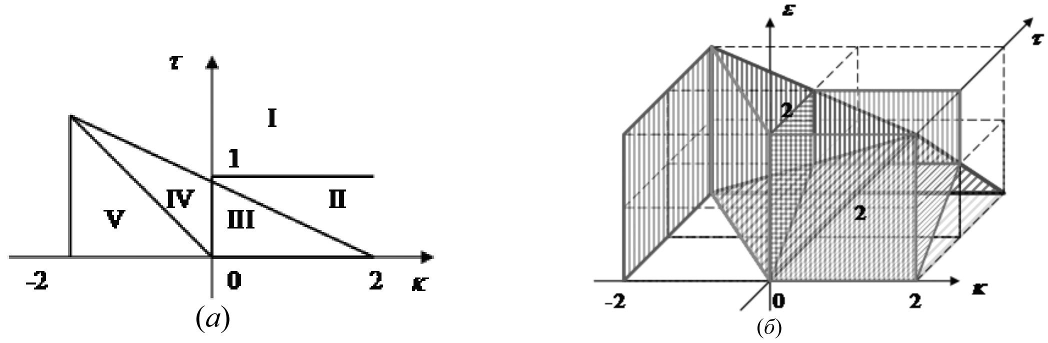


Рис. 2. Асимптотический портрет для неосесимметричных колебаний невращающихся (а) и вращающихся (б) цилиндрических оболочек.

жительных и отрицательных Ω) и асимптотического значений собственных частот λ в зависимости от параметров m и Ω при фиксированном μ.

Для неосесимметричных колебаний быстро вращающихся цилиндрических оболочек (критический сегмент $\kappa = 0$ на плоскости $\varepsilon = 1$) для шарнирного и особого опирания найдены, соответственно, собственные частоты

$$\lambda_k^2 = \frac{(\pi k)^2}{(Lm)^2 + (\pi k)^2}, \ \operatorname{tg}\left(\frac{Lm\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Заметим, что искомая частота $\lambda \sim 1$. Следовательно, для того, чтобы первые серии полученных частот лежали в рассматриваемой области, L должно быть большим.

Найдены также следующие главные члены собственных частот для неосесимметричных колебаний вращающихся цилиндрических оболочек для шарнирного опирания (критический сегмент $\varepsilon = \kappa$ на плоскости $\tau = 0$):

$$\lambda_k = \Omega - \frac{\pi k}{\sqrt{2}L^2},$$

которые верны для длинной оболочки с маленьким числом волн в меридиональном направлении.

Во второй части третьей главы продолжено исследование поведения решения в окрестности $\lambda = 1$ для неосесимметричных колебаний вращающейся оболочки. Найдено выражение для собственных частот неосесимметричных колебаний невращающейся оболочки с жестко закрепленными краями для критической точки $\{\kappa, \tau\} = \{4/3, 0\}$:

$$\lambda^2 = 1 + \mu_*^{4/3}\left(2m^2 + \nu^2\right)^{2/3}\frac{x^6 - 1}{x^2},$$

где x находится из следующего уравнения:

$$\operatorname{tg}\left(\mu_*^{-2/3}\left(2m^2+\nu^2\right)^{1/6}Lx\right)=\frac{2\left(x^3-1\right)\sqrt{x^6+2x^3}}{4x^3-1}.$$

Далее рассматриваются задачи для вращающихся цилиндрических оболочек. Асимптотические портреты для шарнирного и особого опирания краев построены во второй главе (см. рис. 3). Для особого опирания на критическом многоугольнике $\varepsilon=\tau+\tilde{\kappa}$ найдены частоты

$$\lambda_k=1+\tilde{\lambda}=1+\frac{\left(\frac{\pi k}{L}\right)^4\nu\Omega^2+m^2}{\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2}.$$

Для шарнирного закрепления краев на критическом многоугольнике $2\varepsilon=2\tau+\tilde{\kappa}$ собственные частоты колебаний равны

$$\lambda_k=1+\tilde{\lambda}=1+\left(\frac{\pi k\mu}{L}\right)^4\frac{1}{1-\nu^2}+m^2\Omega^2.$$

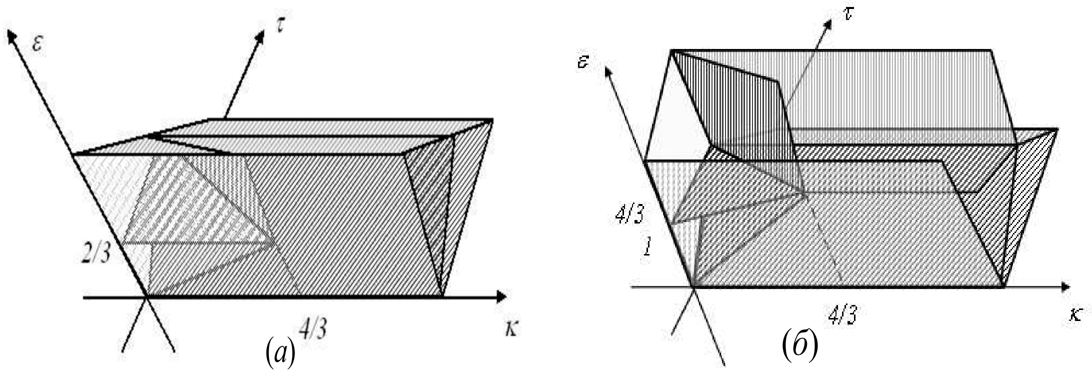


Рис. 3. Асимптотические портреты для неосесимметричных колебаний вращающейся цилиндрической оболочки для основного (а) и особого (б) случаев для λ, близкой к 1.

Заканчивается глава 3 построением решения в области, где характеристическое уравнение имеет кратные корни. Асимптотический портрет, соответствующий второму приближению изображен на рисунке 4а, а его проекция (κ,τ) при $\varepsilon=2$ — на рисунке 4б.

Для задачи с граничными условиями типа жесткой заделки найдено второе приближение для параметра частоты λ:

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{L\sqrt{\lambda}\left(1-\nu^2\right)^{1/4}}{\mu}\right)=\frac{a}{b},$$

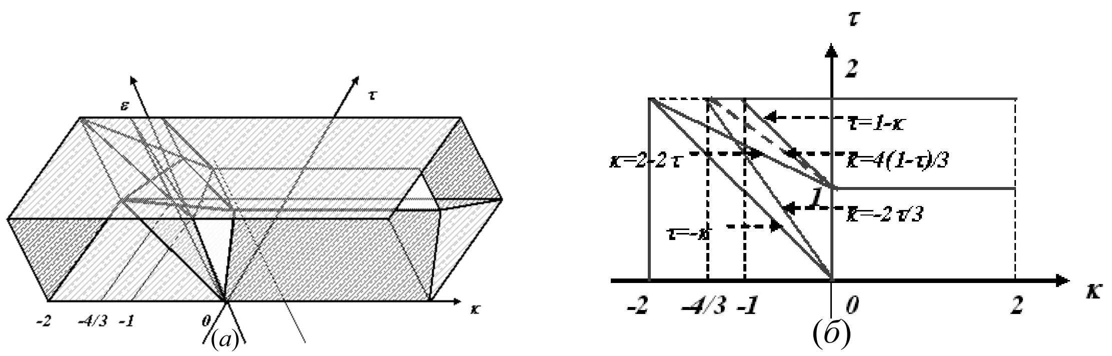


Рис. 4. Асимптотический портрет (а), соответствующий второму приближению в пространстве $(\kappa, \tau, \varepsilon)$ и его проекция (б) на плоскость (κ, τ) для неосесимметричных колебаний вращающейся цилиндрической оболочки для шарнирного опирания.

где

$$a = 2\lambda\mu^2\sqrt{1-\nu^2}\left(\nu^3 + 4\nu^2 + 6\nu + 4\right),$$

$$b = m^2\left(\lambda^2\left(1-\nu^2\right)\left(1+\nu\right)^2 + \mu^4\nu^2\left(2+\nu\right)^2\right).$$

Это выражение верно для длинных оболочек $(L \gg 1)$.

Для этой же задачи, но с граничными условиями типа шарнирного опирания, получена частота

$$\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2 \mu^2}{\left(1-\nu^2\right)^{1/2} L^2}.$$

В приложении 1 кратко представлены методы и алгоритмы построения выпуклой оболочки, используемые в диссертации для изучения характеристического уравнения: стандартный алгоритм построения выпуклой оболочки в трехмерном пространстве, основанный на принципе «сканирования Грэма», алгоритм, разработанный автором диссертации, в основу которого положен принцип «заворачивания подарка» для двумерного и трехмерного случаев; а также алгоритм «быстрого поиска», на основе которого написана программа Qhull, используемая в диссертации для построения выпуклой оболочки в пространстве четырех и более параметров.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

[1] *Landman, I. M.* Asymptotic integration of thin shell equations by means of computer algebra methods / I. M. Landman, A. L. Smirnov, E. M. Haseganu // Proceedings of the 17th Canadian Congress on Applied Mechanics. — Hamilton (Canada): 1999. — Pp.37–38.

[2] *Landman, I. M.* Asymptotic analysis of vibrations of thin cylindrical shells / I. M. Landman // Books of Abstracts for 20th Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics and Student Paper competition. — Alabama (USA): 2000. — Pp.19–20.

[3] *Landman, I. M.* Asymptotic analysis of free vibrations of thin cylindrical shells / I. M. Landman, A. L. Smirnov, E. M. Haseganu // Proceedings of the Forum 2000 Canadian Society for Mechanical Engineering, Presses Internationales Polytechnique, CD. — Montreal (Canada): 2000, — 9p.

[4] *Ландман, И. М.* Исследование характеристических уравнений с помощью обобщенного метода Ньютона / И. М. Ландман, А. Л. Смирнов // Тезисы докладов Международной научной конференции «Третьи Поляховские чтения», Избранные труды. — Санкт-Петербург, 2003. — С. 198-200.

[5] *Ландман, И. М.* Анализ характеристических уравнений с помощью обобщенного метода Ньютона / И. М. Ландман, А. Л. Смирнов // Обозрение прикладной и промышленной математики. — Т. 12, вып. 2, 2005.— С. 419–420.

[6] *Landman, I. M.* Analysis of characteristic equations by generalized Newton's methods / I. M. Landman // Compilation of Abstracts for the 3rd MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics. — Cambridge (USA): 2005. — P.217.

[7] *Landman, I. M.* Asymptotic analysis of vibration of rotating thin cylindrical shells by computer algebra approach / I. M. Landman // Proceedings of International Symposium on Trends in Applications of Mathematics to Mechanics. — Vienna (Austria): 2006. — Pp.85–86.

[8] *Ландман, И. М.*Асимптотический анализ неосесимметричных колебаний вращающихся цилиндрических оболочек / И. М. Ландман // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды 2005-2006». — Санкт-Петербург: Изд. СПбГУ, 2006. — С. 20–39.

[9] *Haseganu, E. M.* Asymptotic integration of free vibration equations of cylindrical shells by symbolic computation / E. M. Haseganu, I. M. Landman, A. L. Smirnov // Advances in Mechanics of Solids: in memory of Prof. E. M. Haseganu. — World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006. — Pp. 85–104.

[10] *Ландман, И. М.* Исследование колебаний вращающейся цилиндрической оболочки с частотами, близкими к точке сгущения / И. М. Ландман // *Вестник С-Петерб. ун-та.*— 2007. — сер. 1, вып. 2. — С. 113-119.