

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КОСТЫРКО Сергей Алексеевич

**НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛЕНОЧНОМ ПОКРЫТИИ  
И ФОРМИРОВАНИЕ РЕЛЬЕФА ЕГО  
ПОВЕРХНОСТИ**

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2008

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики - процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор Греков Михаил Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Филиппов Сергей Борисович  
(СПбГУ)

доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Гиляров Владимир Леонович  
(ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН)

Ведущая организация: Институт проблем машиноведения РАН

Защита состоится "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2008 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании совета Д-212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физ.-мат. наук, профессор

С.А. Зегжда

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Гетероэпитаксиальные структуры с полупроводниковыми пленочными покрытиями получили широкое применение в электронной и оптоэлектронной промышленности. При этом возможность продолжительной эксплуатации приборов микроэлектроники и оптоэлектроники в значительной мере зависит от стабильности образующих их тонкопленочных структур.

Существует ряд серьезных проблем технологического характера, связанных с неустойчивым состоянием формы поверхности пленки и ее морфологическим изменением с течением времени. Интенсивный нагрев и большие напряжения превращают первоначально гладкую поверхность пленки в шероховатую, что негативно отражается на ее электрических и оптических свойствах. Данный феномен подтвержден многочисленными экспериментальными исследованиями, в которых описаны различные конфигурации рельефа. Но, несмотря на часто наблюдаемые морфологические изменения поверхности пленки, причина таких изменений остается до конца не выясненной и вызывает многочисленные дискуссии.

Наиболее распространенной моделью волнообразования поверхности напряженного тела является модель потери устойчивости плоской формы поверхности в результате диффузионных процессов, происходящих в приповерхностном слое.

В большинстве работ, анализ потери устойчивости поверхности основан на учете поверхностной диффузии, определяемой градиентом химического потенциала. При этом предсказывается лишь экспоненциальный рост синусоидальной формы потери устойчивости в диапазоне длин волн, больших критического значения. Работы, где рассматривается комбинированный эффект влияния поверхностной и объемной диффузии, в основном относятся к случаю однородных материалов.

**Целью работы** является исследование напряженного состояния пленочного покрытия с плоской и со слабо искривленной поверхностью, а также анализ формирования рельефа на поверхности напряженной пленки при диффузионных процессах.

**Научную новизну результатов** составляет метод построения фундаментального решения для композита полоса-полуплоскость при действии периодической системы поверхностных сосредоточенных сил; исследование влияния толщины пленки и жесткости подложки на механизм образования рельефа различной формы, а также на концентрацию напряжений на деформированной поверхности.

**Достоверность** полученных в работе результатов обеспечивается математической корректностью постановки задач, использованием строгих анали-

тических методов, а так же сравнением с результатами других авторов.

**Практическая значимость.** Построенное в первой главе фундаментальное решение позволяет формулировать и решать целый класс двумерных краевых задач для твердых тел с пленочным покрытием, находящихся под действием поверхностной периодической нагрузки. Решения таких задач важны на практике для оценки прочности и надежности разнообразных изделий промышленности, имеющих поверхностный слой, отличный от основного материала.

Результаты, полученные во второй и третьей главах, позволяют предсказывать развитие рельефа поверхности гетероэпитаксиального пленочного покрытия, что может позволить разработать методы минимизации плотности распределения дефектов в пленке при ее выращивании и эксплуатации. В частности, это может позволить создавать приборы микро- и оптоэлектроники с улучшенными рабочими характеристиками.

**Основные результаты, выносимые на защиту:**

1. Для упругого композита полоса-полуплоскость построены функции Грина, отвечающие действию периодической системы сосредоточенных поверхностных сил. Функции найдены в виде комплексных рядов Фурье. Проведен анализ полученного решения и найдены границы изменения геометрических параметров задачи, в пределах которых функции Грина могут быть с заданной точностью представлены отрезком ряда Фурье. Построенные функции Грина позволяют определять напряженно-деформированное состояние композита при любой периодической нагрузке, действующей на границе.

2. С использованием полученных функций Грина решена задача потери устойчивости плоской формы поверхности напряженного пленочного покрытия при поверхностной диффузии. Получена явная зависимость амплитуды развития синусоидального рельефа от времени. Исследовано влияние поверхностного напряжения, продольных усилий, толщины пленки и жесткости подложки на критическое значение длины волны возмущения.

3. Решена задача потери устойчивости плоской формы поверхности напряженного пленочного покрытия при комбинированном эффекте влияния объемной и поверхностной диффузии. В качестве основного соотношения получена явная зависимость амплитуды развития периодического рельефа от времени. Проанализировано влияние толщины пленки, жесткости подложки, формы потери устойчивости на критическое значение периода возмущения, а также на критическое значение продольных усилий.

4. Проведен анализ концентрации напряжений, вызванной слабым искривлением поверхности пленочного покрытия в результате действия диффузионных процессов. В первом приближении метода возмущений изучено влияние формы рельефа поверхности, толщины пленки и жесткости подложки на кон-

центрацию напряжений.

**Методы исследования.** В диссертации используются аналитические методы математической физики, теории упругости, термодинамики, теории функций комплексного переменного. В частности, функции Колосова-Мухелишвили, метод суперпозиции, комбинированный метод решения задач для многосвязных областей со сближенными границами, метод Гиббса, метод возмущений.

**Апробация работы.** Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались, на конференциях: II-V Северо-Западная региональная конференция молодых ученых научной школы В.В. Новожилова (г. Санкт-Петербург, 2003-2006); 45 международная конференция “Актуальные проблемы прочности” (г. Белгород, 2006); XVII Петербургские чтения по проблемам прочности (г. Санкт-Петербург, 2007); XVI Республиканская научная конференция аспирантов, магистрантов и студентов по физике конденсированного состояния (г. Гродно, Белоруссия, 2008); 5<sup>th</sup> European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Venice, Italy, 2008).

Результаты диссертации обсуждались на научных семинарах кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики – процессов управления СПбГУ, а также на семинаре академика Н.Ф. Морозова в Институте Проблем Машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург, 2008).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 8 работ. В совместных работах [2–6, 8] соавтору принадлежит постановка задачи и метод решения, диссертанту – реализация предложенного метода и результаты численного анализа. Статьи [2, 5, 8] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 86 наименований. Работа изложена на 92 страницах, содержит 23 рисунка, 1 таблицу.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** приведен краткий обзор литературы, касающейся рассматриваемых в работе проблем. Обосновывается актуальность темы диссертации, указывается цель и методы исследования. Перечислены основные результаты, выносимые на защиту. Также кратко описана структура работы и содержание последующих глав.

В **первой главе** рассмотрена двумерная модель твердого тела с тонким пленочным покрытием в виде упругого композита полоса-полуплоскость, находящегося под действием периодической системы поверхностных сосредоточенных сил  $P$  и равномерно распределенных усилий, уравнивающих эту систему

$$\sigma(z_b) = p_{22}^0 - ip_{12}^0 = p_0(x_1), \quad z_b \in \Gamma_b \quad (1)$$

где функция  $p_0(x_1)$  имеет следующий вид

$$p_0(x_1) = -iP \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x_1 - x_{1k}) + \frac{iP}{a}, \quad P = P_1 + iP_2; \quad x_{1k} = x_{10} + ka, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Решение задачи ищется при условии идеального сцепления на границе контакта

$$u^+ - u^- = 0, \quad \sigma^+ - \sigma^- = 0, \quad z \in \Gamma_c \quad (2)$$

где  $\sigma^\pm = \lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} \sigma(z)$ ;  $u^\pm = \lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} u(z)$ ;  $u = u_1 + iu_2$ ,  $\sigma = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$ .

Кроме того, полагаем

$$\lim_{Imz \rightarrow -\infty} \sigma_{ij}(z) = \lim_{Imz \rightarrow -\infty} \omega(z) = 0 \quad (3)$$

где  $\omega$  — угол поворота,  $\sigma_{ij}$  — компоненты напряжений.

В соответствии с принципом суперпозиции решение исходной задачи представляется в виде суммы решений двух задач: задачи для полуплоскости с упругими свойствами полосы, на границе которой действует требующая определения неизвестная нагрузка при нулевых условиях на бесконечности; задачи для двух соединенных полуплоскостей со скачками усилий и перемещений на границе раздела при тех же нулевых условиях на бесконечности.

После чего, согласно М.А. Грекову, решение задачи о действии периодической системы поверхностных сосредоточенных сил с использованием комплексных потенциалов и алгоритма Шварца сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции  $f(z_b)$

$$f(z_b) - (B_{0c}f)(z_b) = f_0(z_b), \quad z_b \in \Gamma_b \quad (4)$$

Оператор  $B_{0c}$  можно записать в виде

$$B_{0c}f(z_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} M_1(x_1, t) f(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} M_2(x_1, t) \bar{f}(t) dt \quad (5)$$

где ядра  $M_1(x_1, t)$ ,  $M_2(x_1, t)$  — непрерывные функции своих аргументов.

Решение интегрального уравнения (4), а, следовательно, и задачи в целом, находим в виде ряда Фурье

$$f(x_1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k E_k(x_1) \quad (6)$$

здесь  $E_k(x_1) = e^{b_k x_1}$ ,  $b_k = \frac{2\pi i k}{a}$ ,  $C_k = const \in C$ .

После соответствующих преобразований уравнение (4) сводится к функциональному соотношению, содержащему известные функции  $\tilde{V}_k$ ,  $\tilde{W}_k$  параметров задачи и неизвестные коэффициенты  $C_k$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [C_k \tilde{V}_k + \overline{C}_k \tilde{W}_k] E_k(x_1) = f_0(x_1) \quad (7)$$

Разлагая функцию  $f_0(x_1)$  в ряд Фурье

$$f_0(x_1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k(h) E_k(x_1), \quad D_k(h) = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f_0(t) E_{-k}(t) dt \quad (8)$$

находим связь коэффициентов  $C_k$  с коэффициентами этого ряда

$$C_k = \frac{D_k \tilde{V}_{-k} - \overline{D}_{-k} \tilde{W}_k}{\tilde{V}_k \tilde{V}_{-k} - \tilde{W}_{-k} \tilde{W}_k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9)$$

Величину  $N$ , т.е. число слагаемых в (6), определяем из условия

$$|I_N - I| < \varepsilon |I| \quad (10)$$

где  $\varepsilon$  – относительная погрешность аппроксимации (6) в смысле условия (10), и

$$I = \int_0^{a/2} f_0(x_1) dx_1, \quad I_N = \int_0^{a/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [C_k \tilde{V}_k + \overline{C}_k \tilde{W}_k] E_k(x_1) dx_1 \quad (11)$$

Таким образом, в ходе проведенного исследования найдены условия, при выполнении которых погрешность аппроксимации решения одной первой гармоникой ряда Фурье в случае действия горизонтальной силы ( $P_1 = 1$ ,  $P_2 = 0$ ) при значениях коэффициентов Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$  не превышает  $\varepsilon = 0,001$ . В этом случае было исследовано напряженное состояние пленки в зависимости от ее толщины  $h$  и относительной жесткости  $E_2/E_1$  ( $E_1$ ,  $E_2$  – жесткость подложки и пленки, соответственно).

Распределение усилий  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{12}$  вдоль границы раздела и вдоль линий, параллельных границе раздела, показано соответственно на рис. 1, 2. Графики на рис. 1 построены при значениях ширины полосы  $h/a = 0,33$ ;  $0,55$ ;  $0,9$  (кривые 1–3 соответственно), а на рис. 2 – при  $h/a = 0,55$  (кривым 1–3 соответствуют линии  $x_2 = 0$  (граница раздела),  $x_2/h = 0,5$  и  $x_2/h = 0,75$ ). В обоих случаях коэффициент относительной жесткости  $E_2/E_1 = 1/3$ .

Во **второй главе** рассматривается задача устойчивости плоской формы поверхности напряженного пленочного покрытия. Морфология поверхности

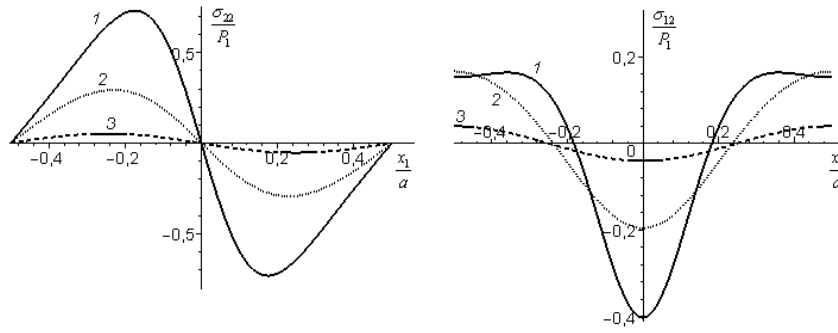


Рис.1

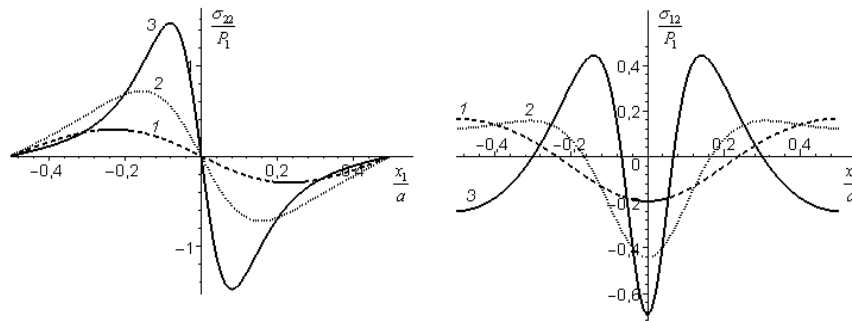


Рис.2

описывается синусоидой с амплитудой, много меньшей длины периода

$$h(x_1, t) = h_0 + A(t) \cos kx_1, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad A(t)/\lambda \ll 1, \quad A(0) = A_0 \neq 0 \quad (12)$$

Если со временем амплитуда возмущенной границы стремится к нулю, то профиль поверхности считается устойчивым.

При этом поверхность пленки свободна от внешних усилий, т. е.

$$\sigma(z) = 0, \quad z \in \Gamma_b \quad (13)$$

На границе раздела двух сред  $\Gamma_b$  выполняются условия контакта (2). Кроме того на бесконечности имеют место условия

$$\lim_{\text{Im } z \rightarrow -\infty} \sigma_{11}(z) = \sigma_1, \quad \lim_{\text{Im } z \rightarrow -\infty} \sigma_{22}(z) = \lim_{\text{Im } z \rightarrow -\infty} \sigma_{12}(z) = 0; \quad \lim_{\text{Im } z \rightarrow -\infty} \omega(z) = 0 \quad (14)$$

В силу (2) и закона Гука продольные усилия в пленке  $\sigma_0$  и в подложке  $\sigma_1$  связаны соотношением

$$\sigma_1 = \frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)} \sigma_0 \quad (15)$$



В качестве основного механизма волнообразования рассматривается поверхностная диффузия. В соответствии с работами Asaro and Tiller, Гринфельда, Freund выражение для скорости движения точек поверхности в нормальном направлении имеет вид

$$V_n = -\Omega \frac{\partial J_s}{\partial s} \quad (16)$$

В силу выражения для химического потенциала на искривленной поверхности

$$\mu = (U(x_1, t) - \kappa\gamma) \Omega \quad (17)$$

и выражения для потока масс вдоль рассматриваемой поверхности

$$J_s = -\frac{D_s C_s}{\kappa_b T} \frac{\partial \mu}{\partial s} \quad (18)$$

линеаризованное дифференциальное уравнение движения точек поверхности принимает вид

$$\frac{\partial h(x_1, t)}{\partial t} = K_s \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[ U(x_1, t) - \gamma \frac{\partial^2 h(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right], \quad K_s = \frac{D_s C_s \Omega^2}{\kappa_b T} \quad (19)$$

В (16)–(19) приняты следующие обозначения:  $D_s$  – коэффициент поверхностной диффузии,  $C_s$  – концентрация поверхностных дефектов,  $\kappa_b$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $\Omega$  – атомный объем,  $\gamma$  – плотность поверхностной энергии,  $\kappa$  – кривизна поверхности. Дифференцирование по параметру  $s$  означает дифференцирование по направлению, касательному к поверхности.

Следуя методу возмущений, упругую энергию деформации  $U$  криволинейной поверхности находим в первом приближении из решения задачи теории упругости для полосы, соединенной с полуплоскостью, при действии соответствующих усилий на прямолинейной границе

$$\sigma_{22}^1(z_0) - i\sigma_{12}^1(z_0) = -\sigma_s k^2 \lambda \cos kx_1 + i\sigma_0 k \lambda \sin kx_1, \quad z_0 = x_1 + ih_0 \quad (20)$$

и нулевых напряжениях на бесконечности  $\lim_{Imz \rightarrow -\infty} \sigma_{ij}(z) = 0$ .

Для решения этой задачи используется метод суперпозиции, а также метод, примененный в первой главе при построении фундаментального периодического решения задачи. Интегрируя уравнение (19), с учетом полученного выражения для  $U$  приходим к следующей зависимости амплитуды искривле-

ния от времени

$$\ln \left( \frac{A(t)}{A_0} \right) = K_s (P\sigma_0 - \gamma k) t \quad (21)$$

здесь  $P$  – известная функция, зависящая от толщины пленки  $h_0$ , длины волны возмущения  $\lambda$ , относительной жесткости  $E_1/E_2$ , коэффициентов Пуассона пленки  $\nu_2$  и подложки  $\nu_1$ , продольных усилий  $\sigma_0$ , поверхностного напряжения  $\sigma_s$ .

Анализ данной зависимости показывает, что если длина волны возмущенной поверхности меньше критического значения  $\lambda < \lambda_{cr}$ , то амплитуда искривления уменьшается со временем, и, следовательно, плоская форма поверхности пленки является устойчивой.

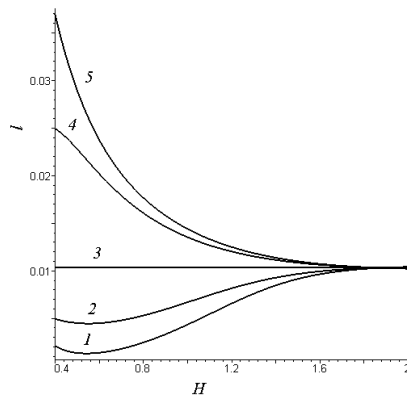


Рис.3

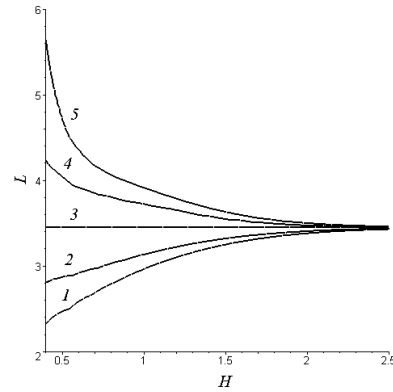


Рис.4

В ходе исследования, посредством учета поверхностного напряжения  $\sigma_s$ , было выявлено, что изменение знака усилия  $\sigma_0$  приводит к изменению величины  $\lambda_{cr}$ . На рис. 3 приведены зависимости относительной разности значений критических длин волн  $l = (\lambda_{cr}^- - \lambda_{cr}^+)/\lambda_{cr}^-$  от приведенной ширины пленки  $H = h_0\sigma_0^2/(\gamma E_2)$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$  и  $\sigma_s = \gamma$ . Значения  $\lambda_{cr}^\pm$  вычислены при  $\sigma_0 = \pm 10^{-2} E_2$ .

На рис. 4 построена зависимость безразмерной критической длины волны  $L = \lambda_{cr}\sigma_0^2/(\gamma E_2)$  от приведенной ширины пленки  $H = h_0\sigma_0^2/(\gamma E_2)$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$  и  $\sigma_s = 0$ . Как и на рис. 3, кривым 1–5 соответствуют значения относительной жесткости основного материала и пленки  $E_1/E_2 = 0, 1; 0, 3; 1; 3; 10$ .

Поскольку кроме поверхностной диффузии при высокотемпературном воздействии наблюдается движение атомов вглубь материала, то в **третьей главе** считается, что под действием интенсивного внешнего нагрева морфология пленочного покрытия определяется не только потоком диффундирующих атомов на поверхности, но также и объемной диффузией.

Предполагается, что форма потери устойчивости захватывает лишь приповерхностный слой пленки, толщиной которого мы пренебрегаем. Диффузии

онный процесс также локализован лишь в данном поверхностном слое. Принимая во внимание результаты многочисленных экспериментальных исследований, морфологию поверхности зададим следующим образом

$$h(x_1, t) = h_0 + A(t)f(x_1) \quad (22)$$

где  $A(t)$  — амплитуда,  $A/\lambda = \varepsilon \ll 1$ ,  $A(0) = A_0 \neq 0$ ,  $\lambda$  — длина периода искривленной поверхности. Считаем, что функция  $f(x_1)$  ограничена, а также является симметричной и периодической, т.е.

$$|f(x_1)| \leq 1, \quad f(x_1) = f(-x_1) = f(x_1 + \lambda), \quad \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x_1) dx_1 = 0 \quad (23)$$

В соответствии с работами Mullins; Panat, Hsia and Cahill, выражение для скорости движения поверхности в нормальном направлении имеет следующий вид

$$V_n = -\Omega \frac{\partial J_s}{\partial x_1} + \Omega (-J_v) \quad (24)$$

В (24) приняты следующие обозначения:  $J_s$  — поток массы вещества вдоль искривленной поверхности,  $J_v$  — поток массы по нормали к поверхности

$$J_v = -D_v \left. \frac{\partial [C(x_1, x_2)/\Omega]}{\partial x_2} \right|_{x_2=h_0} \quad (25)$$

где  $D_v$  — коэффициент самодиффузии вакансий.

Концентрация вакансий в объеме тела, источники и стоки которых находятся на криволинейной поверхности, определяется соотношением

$$C(x_1, x_2) = C_v + \frac{C_v \Omega}{\kappa_b T} [\kappa \gamma + \Delta P(x_1, t)] e^{k(x_2 - h_0)} \quad (26)$$

где  $C_v$  — концентрация вакансий в теле с плоской границей, находящихся в равновесном состоянии при заданной температуре и действии среднего напряжения  $\sigma_0$ ,  $\Delta P(x_1, t)$  — вариация гидростатического напряжения на поверхности в результате искривления последней при плоской деформации. Величина  $\Delta P$  оказывает такое же влияние на концентрацию вакансий, как и изменение капиллярного давления.

Полагая, что при потере устойчивости рельеф поверхности не меняет своей формы, а лишь экспоненциально возрастает, то для того чтобы получить явную зависимость амплитуды от времени, введем усреднение нормальной скорости движения точек поверхности пленочного покрытия по половине длины

впадины, т.е. на интервале  $[0, x_0]$  ( $x_0 \in [0, \lambda/2] : f(x_0) = 0$ ).

Это позволяет перейти к рассмотрению усредненного уравнения движения части поверхности, соответствующей впадине (или выступу)

$$\int_0^{x_0} \frac{\partial h(x_1, t)}{\partial t} dx_1 = \int_0^{x_0} \left\{ K_s \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[ U(x_1, t) - \gamma \frac{\partial^2 h(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right] + K_v k \left[ \gamma \frac{\partial^2 h(x_1, t)}{\partial x_1^2} + \Delta P(x_1, t) \right] \right\} dx_1, \quad K_v = \frac{D_v C_v \Omega}{\kappa_b T} \quad (27)$$

Как и в главе 2, Следуя методу возмущений, упругую энергию деформации криволинейной поверхности  $U$ , а также разность гидростатических напряжений на искривленной и плоской поверхности  $\Delta P$  находим в первом приближении из решения задачи теории упругости для полосы, соединенной с полуплоскостью, при действии соответствующих усилий на прямолинейной границе

$$\sigma_{22}^1(z_0) - i\sigma_{12}^1(z_0) = \lambda [\sigma_s f''(x_1) - i\sigma_0 f'(x_1)], \quad z_0 = x_1 + ih_0 \quad (28)$$

Принимая во внимание разложение функции  $f(x_1)$  в ряд Фурье

$$f(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nkx_1), \quad a_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \cos(nkt) dt \quad (29)$$

интегрируем усредненное уравнение движения (27). В результате приходим к следующей зависимости амплитуды искривления от времени, физических и геометрических параметров задачи, входящих в выражения для величин  $Q_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,

$$\ln \left( \frac{A(t)}{A_0} \right) = 8\pi^2 K_s \lambda^{-3} \times \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [Q_n^1 - Q_2 \lambda^{-1} - D(Q_n^3 \lambda + Q_4)] a_n n^{-1} \sin(nkx_0)}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-1} \sin(nkx_0)} t \quad (30)$$

Геометрически линейный анализ лишь предсказывает экспоненциальный рост синусоидальной формы потери устойчивости в диапазоне длин волн, больших критического значения, и не позволяет проследить эволюцию рельефа поверхности. В то же время, в работе Pang, Huang предложен вариационный принцип, основанный на уравнениях неравновесной термодинамики, что позволило выявить более богатую динамику развития рельефа поверхности твердого тела.

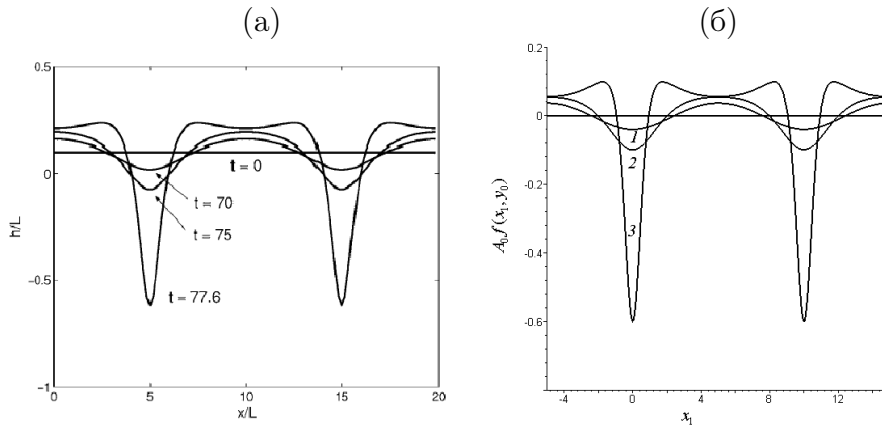


Рис.5

На рис. 5 (а) – показано развитие рельефа со временем, полученное Pang, Huang; (б) – график функции  $A_0 f(x_1, y_0)$ , где

$$f(x_1, y_0) = \frac{-\operatorname{Re} \left[ sh^{-2} \left( \frac{\pi}{\lambda} (y_0 + ix_1) \right) \right]}{\left| \operatorname{Re} \left[ sh^{-2} \left( \frac{\pi}{\lambda} y_0 \right) \right] \right|} \quad (31)$$

при различных значениях параметров  $y_0, A_0$  (кривые 1, 2, 3 построены при следующих значениях:  $y_0 = 6, A_0 = 0,04$ ;  $y_0 = 3, A_0 = 0,1$ ;  $y_0 = 1, A_0 = 0,6$ ). Как видно, изменение формы рельефа с увеличением времени аналогично изменению формы поверхности, описываемой функцией (31), при уменьшении параметра  $y_0$ .

Будем предполагать, что в начальный период времени форма поверхности пленочного покрытия описывается (22), (31) при фиксированном значении  $y_0$ .

В качестве критерия точности аппроксимации функции  $f$ , как и в главе 1, взят интегральный критерий (10), (11).

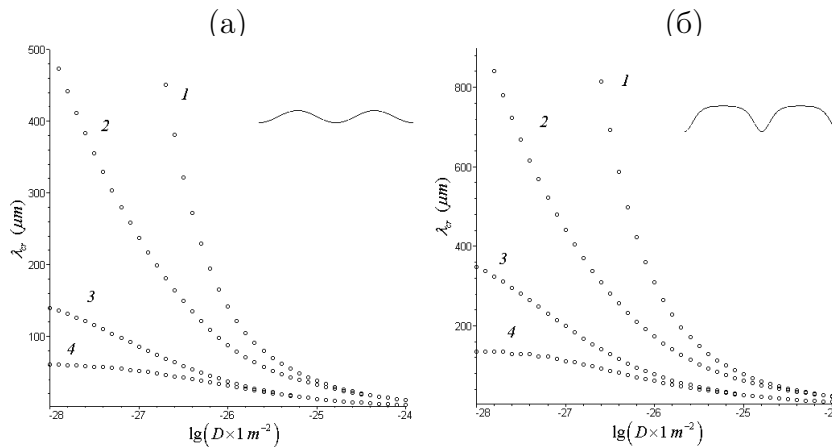


Рис.6

На рис. 6 построена зависимость критического значения длины волны  $\lambda_{cr}$  от значения коэффициента  $D$ . При этом рассматривается система тепловой защиты с никелевым пленочным покрытием, исследованная в работе Panat, Hsia, Cahill при  $\mu_2 = 100 \text{ GPa}$ ,  $\Omega = 4,29 \times 10^{-29} \text{ m}^3$ ,  $\nu_2 = 1/3$ ,  $\gamma = 1 \text{ J/m}^2$ . Кривым 1, 3 на рисунках отвечает значение  $E_1/E_2 = 10$ , а кривым 2, 4 –  $E_1/E_2 = 0,1$ , причем кривые 1, 2 построены при значениях  $\sigma_0 = -15 \text{ MPa}$ , а 3, 4 – при  $\sigma_0 = -100 \text{ MPa}$ . В правом верхнем углу на рисунках изображен рельеф искривленной поверхности пленки, для которого  $y_0 = 6$ ,  $N = 1$  (а);  $y_0 = 1.5$ ,  $N = 4$  (б)).

Известно, что морфологическое изменение поверхности гетероэпитаксиального пленочного покрытия приводит к локальному росту напряжений в образовавшихся впадинах. При достаточно больших напряжениях несоответствия, а также при действии внешних усилий, это может привести к зарождению трещин или дислокаций на поверхности пленки. В связи с рассмотренной проблемой влияния диффузионных процессов на образование гофра поверхности пленочного покрытия особый интерес поэтому представляет изучение концентрации напряжений на деформированной поверхности (22), (31).

Следуя методу возмущений, максимальное напряжение находим в первом приближении из решения задачи теории упругости для полосы, соединенной с полуплоскостью, при действии усилий (28) на прямолинейной границе. При этом

$$\sigma_{11}^{\max} = \sigma_{11}|_{x_1=0} = \sigma_0 - \frac{\varepsilon}{1 - \nu_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2\pi n E_2}{1 + \nu_2} P_n + \nu_2 \sigma_s (nk)^2 \varepsilon \lambda \right] a_n \quad (32)$$

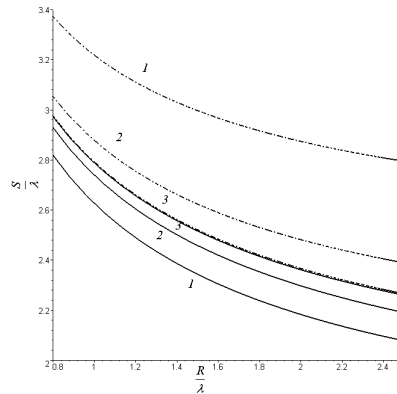


Рис. 7

На рис. 9 показана зависимость коэффициента концентрации напряжений  $S = \sigma_{11}^{\max} / \sigma_0$  от радиуса кривизны  $R$  при значениях коэффициента относительной жесткости  $E_1/E_2 = 0,1; 10$  (сплошная и штрих-пунктирная линии

соответственно) и толщины пленки  $h_0/\lambda = 0, 2; 0, 4; 0, 8$  (кривые 1, 2, 3 соответственно) в случае  $\varepsilon = 0, 1; \nu_1 = \nu_2 = 1/3; \sigma_s = 0; N = 4$ .

**В заключении** формулируются основные результаты работы.

#### **Список публикаций по теме диссертации**

1. Костырко С.А. Периодическая задача о действии сосредоточенных сил на границе композита полоса-полуплоскость (приближенное решение) // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела / Под ред. К.Ф.Черных. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2003. Вып. 7. С. 118-127.

2. Греков М.А., Костырко С.А. Напряженное состояние тонкого покрытия при действии периодической системы поверхностных сосредоточенных сил // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10., 2004 № 4. С. 99-107.

3. Греков М.А., Костырко С.А. Периодическая задача о действии сосредоточенных сил на границе композита полоса-полуплоскость (точное решение) // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. СПбГУ, 2004. Вып. 8. С. 167-173.

4. Греков М.А., Костырко С.А. Комбинированный эффект влияния объемной и поверхностной диффузии на развитие рельефа поверхности пленочного покрытия // Сб. тезисов 45-й междунар. конф. "Актуальные проблемы прочности". Белгород, 2006. С. 62.

5. Греков М.А., Костырко С.А. Устойчивость плоской формы пленочного покрытия при поверхностной диффузии // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10, 2007, № 1, С. 46-54.

6. Греков М.А., Костырко С.А. Образование переодических структур на поверхности пленочного покрытия по действием интенсивного нагрева // XVII Петербургские чтения по проблемам прочности, Часть I. Санкт-Петербург, 2007. С. 208-211.

7. Костырко С.А. Образование гофра на поверхности пленочного покрытия // Сб. тезисов XVI Республ. науч. конф. аспирантов, магистрантов и студентов по физике конденсированного состояния. Гродно: ГрГУ, 2008. С. 56-57.

8. Греков М.А., Костырко С.А. Формирование рельефа поверхности пленочного покрытия при поверхностной и объемной диффузии // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1, 2008, № 1. С.106-113.