САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КНЯЗЕВА Марина Геннадьевна

ИЗУЧЕНИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

05.13.18 - Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2008

Работа выполнена в Санкт-Петербургском Институте Информатики и Автоматизации Российской Академии Наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Панина Гаянэ Юрьевна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Тараканов Александр Олегович (Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН)

кандидат физико-математических наук, доцент, Вяткина Кира Вадимовна (Санкт-Петербургский государственный университет)

Ведущая организация: Российский Государственный Педагогический Университет им. А.И. Герцена

Защита состоится "___ "___________ 200 _ г. в ______ часов на заседании совета Д 212.232.51 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу:

199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан "___ "___________ 200 _ г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук

Мартыненко Б.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Основным объектом исследования диссертационной работы являются гиперболические виртуальные многогранники и их веера. В диссертации решены две актуальные теоретические проблемы теории гиперболических виртуальных многогранников и ряд взаимосвязанных задач математического моделирования и компьютерной визуализации гиперболических объектов.

Виртуальные многогранники впервые появились из соображений алгебраической геометрии в работе А. Пухликова и А. Хованского (см. [10]), где впервые была дана геометрическая интерпретация разностям Минковского выпуклых многогранников. Но, как часто бывает в науке, появление понятия оказывается подготовленным исследованиями в нескольких различных направлениях. Например, виртуальные многогранники возникли естественным образом в алгебре многогранников П. Мак-Маллена (см. [14]). Предпосылки изучения разностей Минковского выпуклых тел можно найти и в ранних трудах А.Д. Александрова (см. [4], [5]). Формальные разности Минковского, как удобный инструмент для исследований, появились в трудах А.Д. Александрова и Гремера (см. [4]). Более детально и строго геометрические реализации разностей Минковского гладких выпуклых тел (и, частично, – многогранников) были представлены в работах Р. Лангевина, Г. Левита, Х. Розенберга (см. [11]), И. Мартинез-Мора (см. [13]). Этим обусловлено глубокое теоретическое содержание понятия виртуальных многогранников и широкие, многообразные связи с разными областями науки.

Сегодня теория виртуальных многогранников развивается Г.Ю. Паниной. В работах [7], [8], [16], [18] она особое внимание уделяет их геометрическим аспектам: рассматриваются жесткость, смешанные объемы, классические теоремы геометрии для виртуальных многогранников. В [18] Г.Ю. Панина выделила подкласс виртуальных многогранников — класс *гиперболических виртуальных многогранников*. Эти объекты в некотором смысле противоположны по своим свойствам выпуклым многогранникам. Изучение этих объектов с точки зрения их внешней геометрии и комбинаторики продолжается в данной работе.

Гиперболические многогранники появились в [18] как вспомогательные объекты для построения контрпримеров к известной и авторитетной гипотезе А.Д. Александрова [17]: *Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – гладкое выпуклое тело. Если для постоянной C в каждой точке границы ∂K имеем $R_1 \leq C \leq R_2$, тогда K – шар. (Здесь R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны ∂K.)* $\Box$

Эта гипотеза долгое время считалась справедливой, но все попытки доказать ее были безуспешны. Однако, в 2001 году она неожиданно была опровергнута французским математиком И. Мартинез-Мором (см. [12]). Он показал, что седловые поверхности с некоторыми особыми свойствами (они называются *гиперболическими ежами*), дают контпримеры к гипотезе А.Д. Александрова. И. Мартинез-Мор построил первый пример гиперболического ежа (см. [12] и рис. 1) — это полуалгебраическая поверхность, сторого седловая и гладкая всюду, кроме четырех точек-рогов. Дискретный аналог этой поверхности был построен им же в [13]. Это *гиперболический виртуальный многогранник.*

В работах [17], [18] Г.Ю. Панина построила целую серию гиперболических многогранников; каждый из них приводит к контрпримеру. Нахождение новых типов гиперболических многогранников автоматически дает новые типы контрпримеров к гипотезе А.Д. Александрова. Особенно интересной задачей является нахождение новых гиперболических многогранников с 4 рогами. В данной работе был построен (теоретически и численно – в виде трехмерной модели) новый пример гиперболического многогранника с 4 рогами, существенно отличающийся от примеров, предложенных И. Мартинез-Мором в [13] и Г.Ю. Паниной в [20].

Гиперболические многогранники оказались полезными в разных математических задачах. Например, они позволили Г.Ю. Паниной уточнить теорему А.Д. Александрова о многогранниках с невкладываемыми гранями. Также недавно обнаружилась неожиданная и перспективная связь теории гиперболических многогранников с теорией псевдотриангуляций (И. Стрейну, Ф. Сантос, Г. Роте, см. [22]), которая имеет множество взаимосвязей с различными областями науки. Среди них — теория жесткости шарнирных механизмов, теория графов, а так же обширный список задач, связанных с триангуляцией выпуклого множества точек, задачи комбинаторики и информатики. Исследование взаимосвязи псевдотриангуляций сферы и вееров гиперболических многогранников позволило Г.Ю. Паниной (см. [19]) найти новый способ построения гиперболических многогранников (через построение вложенных в сферу графов специального типа).

Таким образом, теория гиперболических многогранников возникла и развивалась в тесной взаимосвязи с различными областями науки. Она накопила большой объем сведений об объектах изучения. Однако, есть множество актуальных задач и областей, которые требуют дальнейшего исследования (список открытых проблем представлен на сайте – см. [24]). Например, почти все известные до этого момента примеры гиперболических многогранников были построены теоретически, а конкретных, численно построенных примеров не было.

Геометрическая сложность гиперболических многогранников, а так же неочевидность некоторых их свойств обуславливает необходимость построения численных примеров, их трехмерной компьютерной визуализации и подробного изучения. В данной работе были построены численные примеры гиперболических многогранников с 4, 6 и 8 рогами, а также созданы трехмерные модели этих объектов и их вееров. Это позволило подтвердить теоретические рассуждения и, возможно, поможет обнаружить некоторые новые свойства гиперболических объектов. Эта задача особенно важна и актуальна в связи с уже существующими ошибочными публикациями.

Особенности гиперболических объектов диктуют требования к выбору прикладных программ для создания их трехмерных моделей. Анализ таких программ трехмерного моделирования, как Polymake, Cinderella, Spherical, 3ds MAX, MathCad, Maple, JavaViewLib, показал, что описанным выше требованиям наилучшим образом удовлетворяет математическая программа Maple. Вместе со специальным модулем JavaViewLib, она позволяет генерировать из построенных трехмерных моделей Java-апплеты и автоматически вставлять их на html-страницу. Это позволило создать целую библиотеку трехмерных визуализаций (см. [24]), которая является полезным источником информации о гиперболических многогранниках и может служить удобным пособием для интерактивных лекций.

Моделирование такого рода продолжает традицию специалистов из технического университета Берлина, создавших интернет-коллекцию трехмерных моделей, относящихся к разным направлениям математики (см. [23]). На этом сайте представлены как классические, так и недавно обнаруженные геометрические объекты, иллюстрирующие новые открытые явления или представляющие собой контрпримеры к авторитетным гипотезам. Создатели сайта (М. Джосвиг, К. Полтиер и др.) следуют идее наглядности геометрии Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена (см. [6]). Одной из задач данной работы является, следуя идее наглядности в геометрии, построение трехмерных моделей конкретных гиперболических многогранников (см. библиотеку трехмерных моделей [24]).

С появлением гиперболических виртуальных многогранников и их гладких аналогов (гиперболических ежей) стало ясно, что классификация сужающихся седловых поверхностей не завершена. Пропущеными оказались целые классы седловых поверхностей, которые получаются при сглаживании гиперболических многогранников. Таким образом, развитие теории гиперболических многогранников послужило дополнению классификации седловых поверхностей.

В работе также сформулирована и доказана теорема, устанавливающая новую связь между гиперболическими многогранниками и классическими седловыми поверхностями. Эта теорема вместе с техникой сглаживания Г.Ю. Паниной предоставляет алгоритм, позволяющий от каждого гиперболического многогранника перейти к сужающейся седловой поверхности нового типа.

Цель работы. Цель диссертационной работы — изучение гиперболических объектов и дальнейшее развитие теории гиперболических виртуальных многогранников с помощью математического моделирования и трехмерной компьютерной визуализации.

Методы исследований. Теоретические методы диссертации варьируются от методов классической геометрии, топологии и комбинаторики до методов, разработанных в рамках новой теории гиперболических многогранников. Отметим, что в теории гиперболических многогранников находят применение и сплайн-методы аппроксимации. В частности, техника сглаживания, впервые описанная в [18], представляет собой типичный пример сплайн-аппроксимации кусочно-линейной функции. Кроме того, используются возможности компьютерной визуализации сложных математических объектов в рамках компьютерных программ 3ds MAX, Maple с подключенным модулем JavaViewLib.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Показано, что любой гиперболический многогранник порождает полную сужающуюся кусочно-линейную седловую поверхность. (Иными словами, рога гиперболического многогранника можно "утянуть на бесконечность").

2. Построены и визуализированы численные примеры гиперболических многогранников с 6 и 8 рогами и их вееров.

3. Построен (теоретически) новый гиперболический виртуальный многогранник с 4 рогами, неизотопный примеру И. Мартинез-Мора.

4. Построены численно и визуализированы новый гиперболический виртуальный многогранник с 4 рогами и его веер.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- доклад "Новый пример гиперболического виртуального многогранника" на семинаре "Маломерная математика"(ПОМИ);
- доклад "Иллюстрированная теория гиперболических виртуальных многогранников" на семинаре "Информатика и компьютерные технологии" (СПИИРАН);
- секционный доклад "New hyperbolic virtual polytope"на международной конференции Эйлера (Third Russian-German Geometry Meeting, Leonard Euler Congress, июль 2007, Санкт-Петербург);

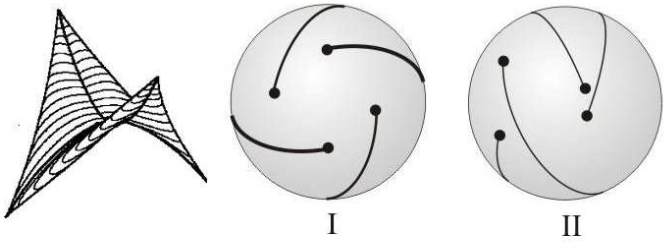

Рис. 1: Ёж И. Мартинез-Мора и неизотопные конфигурации 4 полукругов.

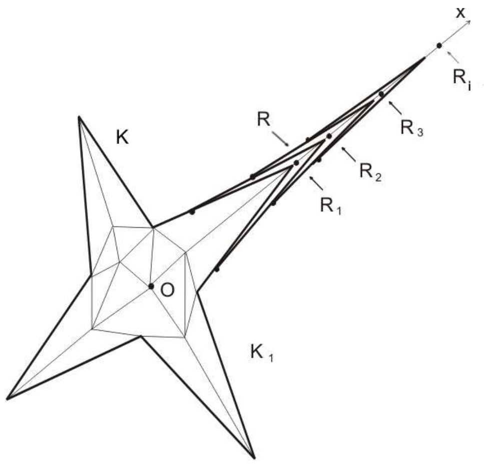

Рис. 2: Утягивание рога на бесконечность.

- тезисы на конференции "Региональная информатика"(октябрь 2008, Санкт-Петербург);
- доклад "Изучение, математическое моделирование и компьютерная визуализация гиперболических объектов"на семинаре по топологии (ПОМИ).

Исследования Г.Ю. Паниной и М.Г. Князевой описаны на сайте http://club.pdmi.ras.ru/ panina/hyperbolicpolytopes.html. Там же выложены построенные трехмерные модели седловых объектов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в теории многогранников, выпуклых тел, в теории псевдотриангуляций, вложений планарных графов и теории жескости графов.

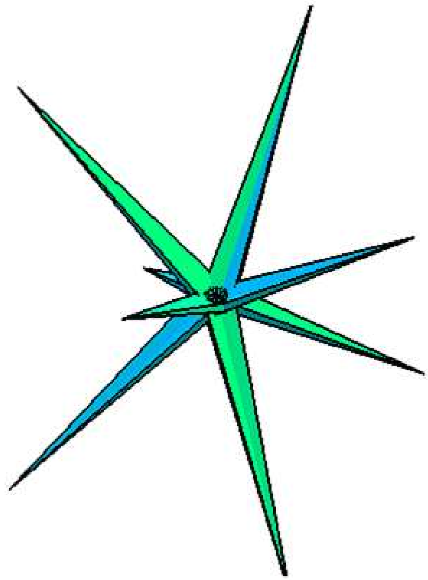

Рис. 3: Виртуальный многогранник с 8 рогами.

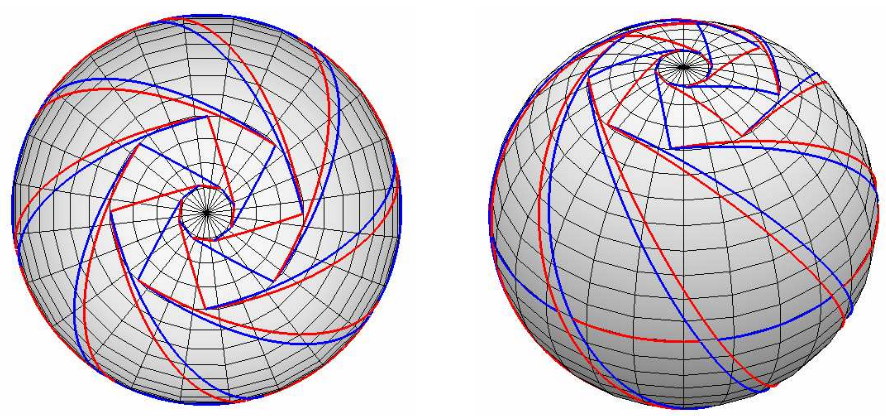

Рис. 4: Веер гиперболического многогранника с 8 рогами.

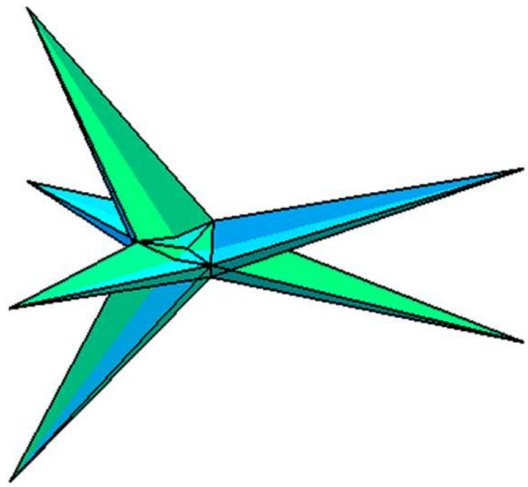

Рис. 5: Виртуальный многогранник с 6 рогами.

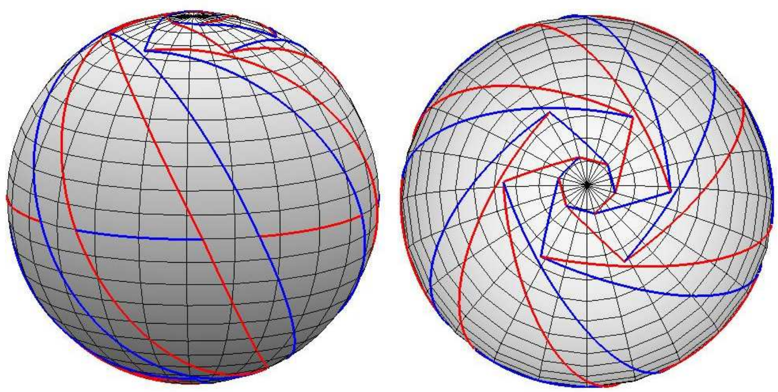

Рис. 6: Веер гиперболического многогранника с 6 рогами.

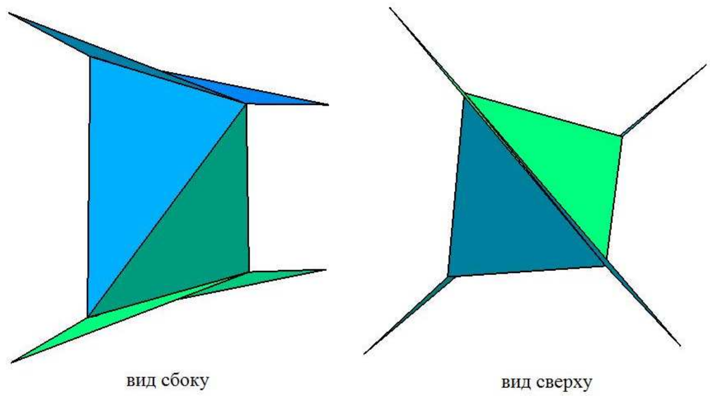

Рис. 7: Виртуальный многогранник с 4 рогами.

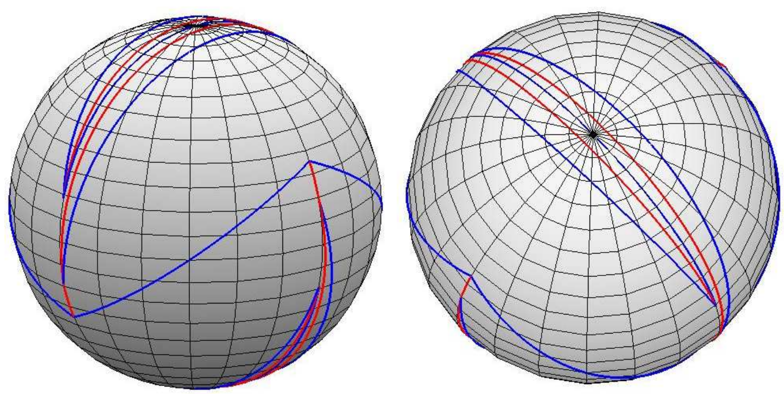

Рис. 8: Веер гиперболического многогранника с 4 рогами.

Публикации. Результаты исследований отражены в работах 1 – 4. В статье 2 кратко описывается новый пример гиперболического ежа с 4 рогами, форма которого была угадана соискателем. Также соискателем был построен явный пример такого объекта и визуализирована его трехмерная модель. Соавтором было доказано существование этого объекта и его неизотопность гиперболическому ежу с 4 рогами И. Мартинез-Мора. В статье 4 соискателем были найдены конкретные координаты вершин гиперболических многогранников и визуализированы их трехмерные компьютерные модели на основе техники, разработанной соавтором. Статьи 1 и 2 опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК на момент публикации.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, приложения и списка литературы, содержащего 56 названий. Общий объём диссертации составляет 136 страниц.

Краткое содержание работы

Структура работы следующая.

Во введении даётся общий обзор результатов по теме работы, и заявляются цели и задачи диссертации.

В **главе 1** дается обзор основных результатов, полученных в данной области, параллельно с введением основных понятий. Особое внимание уделяется гипотезе А.Д. Александрова, истории ее исследования и опровержения.

Виртуальные многогранники представляют собой разности Минковского выпуклых многогранников и образуют группу относительно операции сложения по Минковскому. Она включает в себя все выпуклые многогранники, а также их разности по Минковскому (в том числе и невыпуклые).

Понятие опорной функции выпуклых многогранников переносится по линейности на случай виртуальных многогранников; при этом свойство выпуклости теряется. Опорная функция виртуального многогранника является кусочно-линейной относительно некоторого разбиения пространства $\mathbb{R}^3$ на многогранные конуса с вершиной в начале координат. Такое разбиение называется *веером* виртуального многогранника. Для удобства рассматривается пересечение веера с единичной сферой с центром в начале координат – это *сферический веер.*

Поверхность виртуального многогранника двойственна его сферическому вееру: вершине виртуального многогранника соответствует двумерная область (клетка) веера и грань графика опорной функции и наоборот.

Виртуальные многогранники можно представить геометрически как пару: (поверхность, ассоциированный с ней веер).

Среди виртуальных многогранников выделяют особый класс объектов – класс гиперболических многогранников. Виртуальный многогранник называется *гиперболическим*, если график его опорной функции – седловая поверхность. Для гиперболического многогранника, заданного как пара (кусочно-линейная поверхность K, веер Σ_K), поверхность K – невыпуклая. Ее неседловые точки называются *рогами* гиперболического многогранника.

Актуальный критерий гиперболичности дает следующая лемма.

Лемма [18]: *Если веер виртуального многогранника* ***невыпуклый*** *(то есть при каждой его вершине есть угол, больший π), то этот виртуальный многогранник гиперболический.*

Следующая теорема объясняет устройство клетки веера и грани графика опорной функции, соответствующих рогу виртуального многогранника.

Теорема [18]: *Пусть гиперболический виртуальный многогранник задан как пара (замкнутая кусочно-линейная поверхность K, ассоциированный сферический веер Σ_K). Пусть вершина H поверхности K – рог гиперболического многогранника, а α – клетка веера Σ_K, соответствующая H. Тогда*

- *α — сферический многоугольник с ровно двумя углами, меньшими π;*
- *α ограничена двумя ломанными линиями, обращенными выпуклостями внутрь клетки;*
- *α содержит большой полукруг;*
- *график опорной функции выпуклый вверх вдоль одной из ломаных границы клетки α и выпуклый вниз вдоль другой ломаной (то есть график опорной функции имеет дугу перегиба на клетке α).* □

Естественной основой для классификации гиперболических многогранников является количество рогов. Однако, есть более тонкая классификация, основанная на *конфигурациях больших полукругов* на сфере. Дело в том, что каждый гиперболический многогранник (и гиперболический ёж) порождает конфигурацию непересекающихся больших полукругов на сфере (см. [20]). При этом каждый рог гиперболического многогранника дает один полукруг. Конфигурации больших полукругов на сфере позволяют выявить различия между гиперболическими многогранниками с одинаковым числом рогов.

Г.Ю. Паниной был предложен способ построения гиперболических многогранников с любым числом рогов $N \geq 4$ (см. [17]). Но этот способ дает не все гиперболические многогранники. Нахождение хотя бы одного нового гиперболического многогранника другого типа (с качественно другой конфигурацией больших полукругов на сфере)– достаточно сложная задача.

В **главе 2** формулируется и доказывается новая теорема, устанавливающая взаимосвязь гиперболических многогранников с классическими седловыми объектами — сужающимися поверхностями. Доказательство этой теоремы представляет собой описание найденного алгоритма, позволяющего «утянуть на бесконечность» рог гиперболического виртуального многогранника с сохранением его гиперболичности.

Теорема: *Пусть (K, Σ) — гиперболический виртуальный многогранник, заданный кусочно-линейной поверхностью K и сферическим веером Σ. Зафиксируем один из рогов этого гиперболического многогранника и обозначим его через R. Пусть клетка σ веера Σ, соответствующая рогу R, строго вмещает большой полукруг. Тогда рог R гиперболического многогранника (K, Σ) можно "утянуть на бесконечность", то есть существует последовательность гиперболических виртуальных многогранников (K_i, Σ_i) (и соответствующая последовательность рогов (R_i)), такая что:*

- $K_1 = K$ *и* $R_1 = R$;
- $x(R_i) \to \infty$ *при* $i \to \infty$, *где* $x(R_i)$ — x- *координата рога* R_i *при определенном выборе системы координат;*
- *кусочно-линейные поверхности* K_i *и* $K_{i+1} (i = 1, ...)$ *отличаются только гранями, близкими к рогам* R_i *и* R_{i+1} *(см. рис. 2).*

Замечание: *В теореме речь идет только об одном роге R гиперболического многогранника (K, Σ). Однако доказательство теоремы дает способ утянуть на бесконечность все рога этого многогранника.*

Замечание: *В качестве K мы можем взять, например, гиперболический многогранник с 4 рогами И. Мартинез-Мора (см. [12]), гиперболический многогранник с 4 рогами Г.Ю. Паниной (см. [18]), любой гиперболический многогранник, построенный в [17], а также гиперболические многогранники, построенные в главах 3 и 4 диссертации. В результате получим целую серию новых объектов.*

Глава 3 посвящена численному построению гиперболических многогранников с 6 и 8 рогами с помощью техники, предложенной Г.Ю. Паниной в [17]. Эти объекты, ранее описанные только теоретически, в диссертационной работе построены явно как пара (поверхность, веер) и реализованы в виде трехмерных моделей. Визуализированы также и их веера (см. [24]). Получено множество иллюстраций поэтапного процесса построения этих объектов. Впервые трехмерные изображения гиперболических многогранников с 6 и 8 рогами и их вееров доступны для ознакомления (см. рис. 3, 4, 5, 6). Построение этих объектов – результат долгой экспериментальной работы по подбору подходящих координат вершин виртуальных многогранников и получению наиболее наглядных визуальных моделей поверхностей и вееров.

В четвертой главе построен (теоретически и численно) новый гиперболический виртуальный многогранник с 4 рогами, а также его веер (см. рис. 7, 8). Трехмерные модели нового гиперболического многогранника и его веера доступны в сети интернет (см. [24]). Эти модели были построены в результате кропотливого экспериментального поиска подходящих координат вершин виртуального многогранника. Необходимо было также добиться и максимальной наглядности.

Поясним, что подразумевается под словом "новый". В [20] показано, что существуют 2 разные (с точностью до изотопии и зеркальной симметрии) конфигурации 4 больших полукругов на сфере (см. рис. 2). Гиперболические многогранники с 4 рогами, предложенные И. Мартинез-Мором в [12] и Г.Ю. Паниной в [17], порождают одну и ту же конфигурацию больших полукругов на сфере (конфигурацию типа I). Напротив, в данной работе построен гиперболический виртуальный многогранник имеющий конфигурацию типа II больших полукругов на сфере, неизотопную конфигурации I.

Теорема: *существует гиперболический виртуальный многогранник с 4 рогами, имеющий конфигурацию больших полукругов типа II.* □

Новый гиперболический многогранник дает новый контрпример к гипотезе А.Д. Александрова.

Г.Ю. Паниной в [20] было теоретически предсказано существование этого объекта. Там же было теоретически описано его построение. Но попытка компьютерно реализовать этот алгоритм привела к объекту, сложному для визуального восприятия. Все же, явное следование идее Г.Ю. Паниной принесло пользу: удалось угадать, как выглядит более простой гиперболический многогранник с теми же свойствами; его оказалось возможным построить с помощью другой техники.

Построенный гиперболический многогранник с 4 рогами преобразуется так, что к нему становится возможным применить технику сглаживания (см. [17]) и получить гладкий гиперболический ёж с 4 рогами (новый тип седловой поверхности). Доказано, что новый гладкий ёж с 4 рогами и ёж И. Мартинез-Мора неизотопны.

Следствие: *Существуют 2 неизотопных гиперболических ежа с 4 рогами каждый.* □

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

В **приложении** приведены координаты вершин построенных гиперболических многогранников и исходные файлы Maple для их визуализации.

Работы автора по теме диссертации

1. *Князева М.Г.* От виртуальных многогранников к классическим седловым поверхностям. Известия высших учебных заведений. Приборостроение, Т. 49 (2006), No. 11, стр. 24–28.

2. *Князева М.Г., Панина Г.Ю.* О неизотопных седловых ежах. Успехи математических наук, (2008), 63: 5(383), стр. 189 – 190.

3. *Knyazeva M.* New example of hyperbolic virtual polytope. Leonhard Euler Congress. Third Russian-German Geometry Meeting (St. Peterburg, Russia). Abstracts (2007), pp. 19–20.

4. *Knyazeva M., Panina G.* An illustrated theory of hyperbolic virtual polytopes. Central European Journal of Mathematics, Versita (with Springer-Verlag GmbH), Vol. 6, No. 2 (2008), pp. 204–217.

Список литературы

[1] *Александров А.Д.* Теорема единственности для замкнутых поверхностей. ДАН СССР, Т. 19 (1937), с. 227–229.

[2] *Александров А.Д.* О теоремах единственности для замкнутых поверхностей. ДАН СССР, Т. 22 (1939), No. 3, с. 99–102.

[3] *Александров А.Д.* Выпуклые многогранники. ГИТЛ, М.-Л., 1950.

[4] *Александров А.Д.* Геометрия и приложения. Избранные труды / А.Д. Александров. Новосибирск: Наука, Т. 1 (2006).

[5] *Александров А.Д.* Выпуклые многогранники. Избранные труды / А.Д. Александров. Новосибирск: Наука, Т. 2 (2007).

[6] *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. (пер. Каменецкого С.А.) М.-Л., ОНТИ, 1936.

[7] *Панина Г.Ю.* Смешанные объемы многогранных функций. Алгебра и Анализ, Т. 6 (1996), No. 6, с. 1209–1217.

[8] *Панина Г.Ю.* Виртуальные многогранники и классические вопросы геометрии. Алгебра и Анализ, Т. 14 (2002), No. 5, с. 152–170.

[9] *Панина Г.Ю.* Алгебра многогранников. Мат. Просвещение, серия 3, No. 10 (2006), с. 109–131.

[10] *Пухликов А.В., Хованский А.Г.* Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников. Алгебра и Анализ, Т. 2 (1992), No. 2, с. 161–185.

[11] *Langevin R. Levitt G. Rosenberg H.* Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss). Singularities, Warsaw, Banach Center Publ., Vol. 20 (1985), pp. 245–253.

[12] *Martinez-Maure Y.* Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère. C.R. Acad. Sci. Paris, Vol. 332 (2001), No. 1, pp. 41–44.

[13] *Martinez-Maure Y.* Théorie des hérissons et polytopes. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1, 336(3) (2003), pp. 241–244.

[14] *McMullen P.* The polytope algebra. Adv.Math., Vol. 78 (1989), No. 1, pp. 76–130.

[15] *Panina G.* On Minkowski decompositions of polytopes. Proc. ADG-2000 (Automated deduction in geometry), 2000, pp. 228–233.

[16] *Panina G.* Rigidity and flexibility of virtual polytopes. Central European J. of Math., Vol. 2 (2003), pp. 157–168.

[17] *Panina G.* New counterexamples to A.D. Alexandrov's hypothesis. Advances in Geometry, Vol. 5 (2005), pp. 301–317.

[18] *Panina G.* On hyperbolic virtual polytopes and hyperbolic fans. Central European J. of Math., Vol. 4 (2006), No. 2, pp. 270–293.

[19] *Panina G.* Planar pseudo-triangulations, spherical pseudo-tilings and hyperbolic virtual polytopes. Preprint, math.MG/0607171 at http://www.arxiv.org

[20] *Panina G.* On non-isotopic saddle surfaces. Preprint of the Ervin Schroedinger Institute http://www.esi.ac.at

[21] *Panina G.* A. D. Alexandrov's uniqueness theorem for convex polytopes and its refinements. Contributions to Algebra and Geometry, Vol. 49 (2008), No. 1, pp. 59–70.

[22] *G. Rote, F. Santos, I. Streinu.* Expansive motions and the polytope of pointed pseudo triangulations. in: B. Aronov, S. Basu, J. Pach, M. Sharir (Eds.), Discrete and Computational Geometry - The Goodman-Pollack Festschrift, Springer-Verlag, Berlin, 2003, pp. 699–736.

[23] Интернет-сайт *www.eg-models.de*

[24] Интернет-сайт
http://club.pdmi.ras.ru/ panina/hyperbolicpolytopes.html