Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Иванова Ольга Юрьевна

Строение топологической милноровской K-группы двумерного локального поля

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2008

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель	доктор физико-математических наук ЖУКОВ Игорь Борисович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, ГОРДЕЕВ Николай Леонидович (Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена), кандидат физико-математических наук, ОСИПОВ Денис Васильевич (Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва)
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН

Защита состоится „...........“.. 200... г. в .... часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д.7/9.

Защита будет проходить в Петербургском отделении Математического института имени В. А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, 27.

Автореферат разослан „.....“.................. 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор В.М.Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В диссертации рассматриваются задачи, связанные с двумерными локальными полями. Многомерные локальные поля были введены А. Н. Паршиным и К. Като и являются естественным обобщением обычных локальных полей. Сейчас они достаточно изучены, И. Б. Жуковым в [4] и [18] доказана теорема о классификации. На многомерных локальных полях определена топология, которая учитывает топологии полей вычетов; она была описана А.Н. Паршиным в [8]. Это сильнейшая топология, для которой любой элемент однозначно раскладывается в сходящийся ряд, в котором каждое слагаемое является произведением локальных параметров в некоторых степенях и представителя элемента из последнего поля вычетов. Такая топология определена однозначно, если первое поле вычетов имеет ненулевую характеристику.

В теории полей классов многомерных локальных полей вместо мультипликативных групп используются милноровские K-группы. Для обычных локальных полей строение K-групп хорошо известно. Про вторую милноровскую K-группу К. Муром было доказано, что она изоморфна прямой сумме двух слагаемых, одно из которых – группа корней из единицы исходного поля, а второе – подгруппа K-группы, состоящая из элементов, делящихся на количество корней из единицы; в работах Дж. Тэйта [17], А. А. Суслина [16], Дж. Каррола [10], А. С. Меркурьева [15] доказано, что эта подгруппа является однозначно делимой. М. Я. Сивицкий в [9] проверил, что милноровская K-группа с номером больше двух сама является однозначно делимой.

Милноровские группы многомерных локальных полей рассматривались как топологические пространства с различными топологиями, описанными, например, в [5] и [13]. Мы будем использовать топологию, введенную А.Н. Паршиным. А именно это сильнейшая топология на n-й милноровской группе, для которой непрерывно отображение из n-кратного произведения поля в эту группу, а также секвенциально непрерывны групповые операции. Полученная таким образом топология не является хаусдорфовой, и чаще вместо исходной группы рассматривается факторгруппа по подгруппе, порожденной элементами из пересечения окрестностей нуля. Для двумерного локального поля описанная факторгруппа является топологической группой, хотя в общем случае это не так. Для поля ненулевой характеристики эта топологическая группа описана А. Н. Паршиным в [8] в случае, когда последнее поля вычетов конечно; некоторые обобщения получены Б. М. Беккером [1] и И. Б. Фесенко [12].

Для топологических K-групп определен символ Гильберта, связанный с отображением взаимности, а именно, это отображение из $K_n^{\mathrm{top}}F/p^m \times F^*/F^{*p^m}$ в группу корней p^m-й степени из единицы, такое, что $(\alpha,\beta)_{p^m} = \sqrt[p^m]{\beta}^{\Psi(\alpha)-1}$, где Ψ – отображение взаимности поля F. С. В. Востоковым были получены явные формулы для символа Гильберта: для одномерного локального поля в 1978 году, [2], и для многомерных локальных полей в серии работ, опубликованных начиная с 1985 года, [3].

В диссертации рассматривается топологическая группа, полученная из второй милноровской группы для двумерного локального поля нулевой характеристики, у которого первое поле вычетов имеет ненулевую характеристику, а второе поле вычетов конечно; для милноровских групп большего порядка топологическая группа двумерного поля тривиальна.

Для рассматриваемой топологической группы в [5] было описано множество топологических образующих. Во второй главе диссертации приводится полное доказательство того, что эти элементы действительно являются образующими.

В четвертой главе изучается случай стандартного поля, то есть поля, слабо неразветвленного над своим подполем констант. Для порядков топологических образующих получены оценки сверху и снизу, а также некоторые соотношения между порядками без их явного вычисления. Эти результаты обобщают полученные ранее И. Б. Жуковым: им были вычислены порядки образующих для абсолютно неразветвленного поля.

Основные результаты содержатся в третьей главе. В ней речь идет о наименьшей замкнутой подгруппе T, факторгруппа по которой не имеет кручения. Случай стандартного поля изучался в [5]. Было доказано, что данная подгруппа совпадает с замыканием кручения и факторгруппа по ней является свободным модулем, ранг которого равен степени расширения подполя констант данного поля над полем p-адических чисел. Также было получено приложение этих результатов к абелевым группам Галуа. А именно было доказано, что замыкание кручения совпадает с подгруппой норм из композита максимального абелева взаимно-простого с p расширения с композитом всех бесконечных циклических расширений. В диссертации доказано, что подгруппа T совпадает с замыканием кручения в случае, когда расширение поля над его подполем констант является ручным, а в общем случае факторгруппа замыкания кручения по T является периодической p-группой с ограниченными порядками элементов. Изучены свойства подгруппы T для разных полей: эта подгруппа так же, как и замыкание кручения, согласована с нормой, и, кроме того, согласована с переходом к подполю. Наконец, доказано, что ранг факторгруппы топологической группы по T конечен, и, как и в случае стандартного поля, равен степени расширения подполя констант над полем p-адических чисел.

Цель работы Целью диссертации является

– доказательство теоремы о топологических образующих милноровской K-группы;

– описание подгруппы милноровской K-группы, близкой к замыканию кручения, факторгруппа по которой имеет конечный ранг;

– изучение порядков образующих милноровской K-группы стандартного поля.

Методы исследования В работе используется теорема о вложении произвольного многомерного поля в стандартное, а также свойства норменных подгрупп для конечных расширений двумерных полей. При изучении стандартного поля используется теория Мики циклических расширений.

Научная новизна Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность Работа носит теоретический характер. Результаты и методы могут быть использованы при дальнейшем изучении топологических K-групп многомерных локальных полей и в исследованиях по локальной теории полей классов.

Апробация работы Результаты работы докладывались на Санкт-Петербургском алгебраическом семинаре им. Д. К. Фаддеева.

Публикации По теме диссертации опубликованы три работы, список которых приведен в конце автореферата. В журнале, входящем в перечень ВАК, опубликована одна работа.

Объем и структура работы Диссертация изложена на 86 страницах и состоит из введения и четырех глав, разделенных на 12 параграфов. Библиография содержит 39 названий.

Содержание работы

Во введении содержится обзор результатов работы. В первой главе вводятся основные определения и приводятся вспомогательные утверждения. Во второй главе доказывается теорема, используемая в дальнейших доказательствах. Основные результаты содержатся в главе 3. В главе 4 более подробно изучается частный случай.

Определения и обозначения

Пусть p – фиксированное простое число, $p > 2$. Будем обозначать:

$v_p(x)$ – p-адическое нормирование p-адического числа x;

ζ_p – первообразный корень p-й степени из единицы.

$\wp$ – отображение $x \mapsto x^p - x$.

Множество $\mathbb{Z}^2$ будем предполагать лексикографически упорядоченным в следующем смысле: $(a, b) < (c, d)$, если $b < d$ или $b = d$, $a < c$.

Для локального поля k обозначим через через $\overline{k}$ его поле вычетов, через v_k – его нормирование, и положим $V_k = \{1 + a \mid v_k(a) > 0\}$.

Пусть K – двумерное локальное поле. Будем обозначать $K^{(1)} = \overline{K}$, $K^{(0)} = \overline{K^{(1)}}$. Для всех рассматриваемых двумерных полей K предполагаем, что $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = p$, поле $K^{(0)}$ конечно.

Для двумерного поля K будем обозначать:

$\overline{v}_K = (v_K^{(1)}, v_K^{(2)}) : K \to \mathbb{Z}^2$ – нормирование ранга 2 поля K;

O_K – кольцо целых K;

$\mathfrak{M}_K$ – максимальный идеал O_K;

$V_K = \{1 + a \mid \overline{v}_K(a) > 0\}$;

$U_K(1) = \{1 + a \mid v_K^{(2)}(a) \geq 1\}$;

$\overline{e}_K = \overline{v}_K(p)$ – абсолютный индекс ветвления K;

$\mathfrak{R}_K$ – каноническая подгруппа K^*, состоящая из представителей ненулевых элементов последнего поля вычетов;

$[\theta]$ – элемент $\mathfrak{R}_K$, который представляет элемент θ из последнего поля вычетов.

Нормированию $\overline{v}_K$ соответствуют локальные параметры. Элемент π такой, что $\overline{v}_K(\pi) = (0, 1)$, будем называть униформизирующей K, а элемент t такой, что $\overline{v}_K(t) = (1, 0)$, – вторым локальным параметром K.

Определение 1. Подполем констант двумерного поля K называется максимальное поле $k \subset K$, являющееся алгебраическим расширением $\mathbb{Q}_p$.

Будем рассматривать следующие типы расширений.

Определение 2. Пусть L/K – конечное расширение двумерных полей. Оно называется

константным, если $L = lK$, где l – подполе констант L;

неразветвленным, если $e(L/K) = 1$, и расширение $\overline{L}/\overline{K}$ сепарабельно;

вполне разветвленным, если $e(L/K) = |L : K|$;

свирепым, если $e(L/K) = 1$, и расширение $\overline{L}/\overline{K}$ чисто несепарабельно.

Определение 3. Двумерное поле K называется стандартным, если $e(K/k) = 1$, где k – подполе констант K.

Это определение равносильно данному в [18], а именно двумерное поле K стандартно тогда и только тогда, когда оно имеет вид $k\{\{t\}\}$, где t – второй локальные параметр K.

Далее определим топологические группы.

Определение 4. Пусть F – произвольное поле и $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через I_n подгруппу $F^* \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} F^*$, порожденную символами $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n$ такими, что $\alpha_i + \alpha_j = 1$ для некоторых $i \neq j$. Положим

$$K_n F = F^* \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} F^*/I_n,$$

если $n \in \mathbb{N}$, и $K_0 F = \mathbb{Z}$. Группа $K_n F$ называется n-й милноровской K-группой поля F.

Пусть n – дискретно нормированное поле и $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через VK_nK подгруппу K_nK, порожденную элементами $\{u, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, где $u \in V_K$. Положим

$$K'_nK = K_nK/\cap_{s\geq 1} sK_nK, \quad VK'_nK = VK_nK/\cap_{s\geq 1} sVK_nK.$$

Для двумерного поля K определим топологии на $\overline{K}$, K, K^* и VK_2K, следуя [5] и [18].

Поле $\overline{K}$ изоморфно $K^{(0)}((T))$. Пусть $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ – последовательность подмножеств $K^{(0)}$ таких, что $0 \in U_i$ для любого i и $U_i = K^{(0)}$ для достаточно больших i. Положим

$$W_{\{U_i\}} = \Big\{\sum a_i T^i \mid a_i \in U_i\Big\},$$

и зададим топологию на $\overline{K}$ базой окрестностей нуля $W_{\{U_i\}}$, где $\{U_i\}$ пробегает множество всех подходящих последовательностей.

Чтобы определить топологию на K, выберем произвольный второй локальный параметр t и построим подъем $h_t : \overline{K} \to O_K$ по [7]. Пусть $H_t : \overline{K} \to O_K$ такое отображение, что для любых $a, a_i \in \overline{K}$ выполнено $\overline{H_t(a)} = a$ и

$$H_t\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \overline{t}^i a_i^p\Big) = \sum_{i=0}^{p-1} t^i (H_t(a_i))^p.$$

Обозначим через k_0 поле частных кольца векторов Витта поля $K^{(0)}$ и положим $K' = k_0\{\{T\}\}$, тогда $\overline{K'}$ изоморфно $K^{(0)}((\overline{t}))$. Пусть отображение H_T аналогично H_t и отображение $h : \overline{K'} \to O_{K'}$ таково, что

$$h\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \theta_i \overline{T}^i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} [\theta_i] T^i.$$

Определим отображения $\lambda_i : K^{(0)}((\bar{t})) \to K^{(0)}((\bar{t}))$ так, что

$$h(a) = H_T(a) + \sum_{i \geq 1} p^i H_T(\lambda_i(a)).$$

Подъем $h_t : \overline{K} \to O_K$ определим формулой

$$h_t(a) = H_t(a) + \sum_{i \geq 1} p^i H_t(\lambda_i(a)).$$

Пусть π – униформизирующая K. Для системы окрестностей нуля $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ в $\overline{K}$, таких, что $U_i = \overline{K}$ при достаточно больших i, положим

$$W_{\{U_i\}} = \Big\{ \sum h_t(a_i)\pi^i \mid a_i \in U_i \Big\}.$$

Топология на K определяется базой окрестностей нуля $W_{\{U_i\}}$.

Топология на $K^* \cong V_K \oplus (K^*/V_K)$ определяется как произведение топологии на V_K, индуцированной из K, и дискретной топологии на (K^*/V_K).

Топологию на VK_2K определим как самую сильную топологию, удовлетворяющую свойствам:

1) каноническое отображение $V_K \times K^* \to VK_2K$ секвенциально непрерывно;

2) операции в VK_2K секвенциально непрерывны.

Топологическим пространством $VK_2^{\mathrm{top}}K$ называется множество $VK_2'K$ с топологией, индуцированной описанной топологией VK_2K. Для двумерного поля K топологическое пространство $VK_2^{\mathrm{top}}K$ является топологической группой по [14].

Через $U(1)K_2^{\mathrm{top}}K$ обозначим подгруппу $VK_2^{\mathrm{top}}K$, порожденную символами $\{u, a\}$, где $u \in U_K(1)$.

Пусть L/K – конечное расширение двумерных полей и A – подгруппа $U(1)K_2^{\mathrm{top}}L$. Под $A \cap U(1)K_2^{\mathrm{top}}K$ будем понимать множество элементов

$$x \in U(1)K_2^{\mathrm{top}}K,$$

таких, что $i_{L/K}(x) \in A$, где

$$i_{L/K} : U(1)K_2^{\mathrm{top}}K \to U(1)K_2^{\mathrm{top}}L$$

– гомоморфизм, индуцированный вложением K в L.

Основные результаты

Во второй главе доказана теорема об образующих топологической K-группы.

Теорема 5. *Пусть K – двумерное поле, π, t – его локальные параметры, $\mathfrak{B}$ – базис $K^{(0)}$ над $\mathbb{F}_p$ и $\theta_\wp$ – элемент, порождающий $K^{(0)}/\wp(K^{(0)})$ над $\mathbb{F}_p$. Любой элемент $a \in VK_2^{\mathrm{top}}K$ представим в виде*

$$a = \sum_{\substack{0<(j,i)<\frac{p}{p-1}\overline{e}_K \\ p\nmid i \\ \theta \in \mathfrak{B}}} c_{i,j,\theta}\{1 + [\theta]\pi^i t^j, t\} + \sum_{\substack{0<(j,i)<\frac{p}{p-1}\overline{e}_K \\ p\mid i, p\nmid j \\ \theta \in \mathfrak{B}}} c_{i,j,\theta}\{1 + [\theta]\pi^i t^j, \pi\} + a^*,$$

где

$$a^* = c_t\{1 + [\theta_\wp](\zeta_p - 1)^p, t\} + c_\pi\{1 + [\theta_\wp](\zeta_p - 1)^p, \pi\},$$

если K содержит ζ_p, и $a^* = 0$ в противном случае, для некоторых $c_{i,j,\theta}, c_t, c_\pi \in \mathbb{Z}_p$ таких, что множества

$$A(m) = \{j \mid v_p(c_{i,j,\theta}) \leq m \text{ для некоторых } i, \theta\}$$

ограничены снизу при всех m.

Далее для всех двумерных полей предполагается, что они содержат ζ_p.

В первом параграфе главы 3 изучаются свойства вложения произвольного двумерного поля в стандартное. Существование стандартного поля, содержащего данное, доказано в [11] и [6], причем из результатов [6] следует, что соответствующее расширение можно выбрать конечным, константным и разрешимым. В диссертации описаны инварианты двумерного поля, показывающие, насколько оно отличается от стандартного.

Теорема 6. *Пусть K – двумерное поле. Тогда существуют числа $m_f(K)$ и $m_u(K)$, удовлетворяющие следующему условию: для любого двумерного поля L, содержащего K, такого, что расширение L/K конечно и константно, выполнено*

$$m_f(K) = |\overline{L} : \overline{K}|_{\mathrm{insep}}, \quad m_u(K) = \frac{|\overline{L} : \overline{K}|_{\mathrm{sep}}}{|\bar{l} : \bar{k}|}.$$

Поле K является стандартным тогда и только тогда, когда

$$m_f(K) = m_u(K) = 1,$$

и почти стандартным тогда и только тогда, когда $m_f(K) = 1$. Условие $m_u(K)$ равносильно тому, что существует стандартное поле L, содержащее K, такое, что расширение L/K конечно, константно, циклично и полностью разветвлено, то есть является последовательностью вполне разветвленных и свирепых расширений.

Далее в третьей главе определяется подгруппа T_K топологической группы $U(1)K_2^{\mathrm{top}}K$. В случае стандартного поля через T_K обозначается замыкание кручения $U(1)K_2^{\mathrm{top}}K$, а в общем случае $T_K = U(1)K_2^{\mathrm{top}}K \cap T_L$, где L – произвольное конечное расширение K, являющееся стандартным полем.

Описанная подгруппа T_K близка к замыканию кручения, а также T_K согласована с отображением нормы и переходом к подполю.

Предложение 7. *Пусть K – двумерное поле и T – замыкание кручения $U(1)K_2^{\mathrm{top}}K$. Тогда*

1) $T \subset T_K$;

2) группа T_K/T является периодической p-группой и порядки ее элементов ограничены.

Следствие 8. *Пусть K – двумерное поле, Ψ_K – отображение взаимности, L/K – вполне разветвленное расширение Галуа такое, что* $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}_p$, *и элемент $a \in U(1)K_2^{\mathrm{top}}K$ таков, что $p^s a$ принадлежит T_K для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Тогда $\Psi_K(a)$ действует тривиально на L/K.*

Теорема 9. *1) Для любого двумерного поля K факторгруппа $U(1)K_2^{\mathrm{top}}K/T_K$ не имеет кручения, причем T_K является наименьшей замкнутой подгруппой группы $U(1)K_2^{\mathrm{top}}K$, факторгруппа по которой не имеет кручения.*

2) Пусть L/K – конечное расширение двумерных полей. Тогда

$$\mathrm{N}_{L/K}\, T_L \subset T_K, \qquad T_L \cap U(1)K_2^{\mathrm{top}}K = T_K.$$

При этом подгруппа T_K обладает свойством конечности ранга факторгруппы, известным ранее для стандартного поля.

Теорема 10. *Пусть K – двумерное поле и k – его подполе констант. Тогда ранг факторгруппы $U(1)K_2^{\mathrm{top}}K/T_K$ как $\mathbb{Z}_p$-модуля равен $|k : \mathbb{Q}_p|$.*

При доказательстве этой теоремы используется конечность индекса подгруппы $B + T_K$, где $B = \{\{u, t\} \mid u \in V_k\}$, k –подполе констант K и t – второй локальный параметр K.

Предложение 11. *Пусть K – двумерное поле, k – его подполе констант, L – такое стандартное поле, содержащее K, что расширение L/K конечно, константно, разрешимо, и l – подполе констант L. Положим*

$$\begin{aligned} &r = |k : \mathbb{Q}_p|,\ n = v_p(|L : K|),\ n_0 = v_p(e(K/k)),\ n_1 = v_p(|\overline{L} : \overline{K}|_{\mathrm{sep}}),\\ &n_2 = \log_p((V_k : \mathrm{N}_{l/k} V_l \cdot T(V_k))). \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда

$$(U(1)K_2^{\mathrm{top}}K : B + T_K) \le p^{n_0 r + n - n_1 - n_2}.$$

В качестве следствия из этого предложения получается, что факторгруппа группы $U(1)K_2^{\mathrm{top}}K$ по замыканию кручения является свободным модулем ранга r не только в случае стандартного поля, но и в случае, когда $p \nmid e(K/k)$.

В последнем параграфе третьей главы подгруппа $B + T_K$ более подробно изучается для специальных видов полей. Сначала рассматриваются почти стандартные поля.

Теорема 12. *Пусть $K \subset L$ – такие двумерные поля, что расширение L/K – конечное, разрешимое, константное и неразветвленное, поле L стандартно, k, l – подполя констант K, L и r, n_0, n_2 такие, как в* (1).

1) Имеем $(U(1)K_2^{\mathrm{top}}K : B + T_K) \ge p^{rn_0 - n_0}$.

2) Если для любого $\zeta \in V_l$, являющегося элементом кручения, выполнено $\zeta \in \mathrm{N}_{l/k(\zeta)} V_l$, то

$$(U(1)K_2^{\mathrm{top}}K : B + T_K) = p^{rn_0 - n_2}.$$

Затем рассматриваются поля с условием $m_f(K) = 1$.

Теорема 13. *Пусть K – такое двумерное поле, что $m_f(K) = 1$ в обозначениях теоремы 6, и k – подполе констант K. Обозначим через A множество конечных вполне разветвленных расширений l поля k, таких, что поле lK стандартно, и положим*

$$B_0 = \bigcup_{l \in A} \mathrm{N}_{lK/K} U(1) K_2^{\mathrm{top}}(lK).$$

Тогда $B_0 + T_K = U(1)K_2^{\mathrm{top}}K$.

Кроме того,

$$(U(1)K_2^{\mathrm{top}}K : B + T_K) = p^{rn_0},$$

где r и n_0 такие, как в (1).

В последней главе изучается стандартное двумерное поле K. Рассматриваются образующие топологической K-группы, описанные во второй главе, соответствующие униформизирующей, принадлежащей подполю констант поля K. Почти все они являются элементами кручения, и цель главы – получить оценки на их порядки, а также некоторые соотношения между порядками.

В теоремах 14, 15, 16, 17 предполагается, что поле K стандартно, π, t – его локальные параметры, причем π принадлежит подполю констант, и

$$x_{i,j,\theta} = \begin{cases} \{1 + [\theta]\pi^i t^j, \pi\}, & p \mid i \\ \{1 + [\theta]\pi^i t^j, t\}, & p \nmid i \end{cases},$$

при $(i, j, \theta) \in I$, где

$$I = \Big\{(i, j, \theta) \mid i, j \in \mathbb{Z},\ 0 < (j, i) < \frac{p}{p-1}\bar{e}_K,\ p \nmid (i, j),\ \theta \in K^{(0)},\ \theta \neq 0\Big\}.$$

Доказана оценка снизу для порядков образующих.

Теорема 14. *Пусть*

$$n = \max\{r \mid e(K(\zeta_{p^r})/K) = 1\}$$

и h – скачок расширения $K(\zeta_{p^{n+1}})/K(\zeta_{p^n})$. Положим

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} n + v_p(j), & \frac{pe_K^{(2)}}{p-1} - h < i \leq \frac{pe_K^{(2)}}{p-1},\ j \neq 0 \\ n + v_p(j) + 1, & 0 < i < \frac{pe_K^{(2)}}{p-1} - h,\ j \neq 0 \\ \infty, & i \neq \frac{pe_K^{(2)}}{p-1} - h,\ j = 0 \\ n, & i = \frac{pe_K^{(2)}}{p-1} - h \end{cases}.$$

Тогда при $(i, j, \theta) \in I$ порядок элемента $x_{i,j,\theta}$ в $VK_2'K$ не меньше, чем $p^{\lambda_{i,j}}$.

При дополнительном условии на поле K и униформизирующую π доказана более сильная оценка.

Теорема 15. *Предположим, что* $\pi = \sqrt[l]{\zeta_{p^n} - 1}$, *где* $p \nmid l$.

1) Положим

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} v_p(j) + n + r, & \frac{l}{p^r} < i < \frac{l}{p^{r-1}},\ r \in \mathbb{N} \\ v_p(j) + n + 1, & i = l, j < 0 \\ v_p(j) + n, & (0, l) < (j, i) < \frac{p}{p-1}\overline{e}_K \end{cases}.$$

Тогда при $(i, j, \theta) \in I$, $j \neq 0$ *порядок элемента* $x_{i,j,\theta}$ *в* $VK_2'K$ *не меньше* $p^{\lambda_{i,j}}$.

2) Порядок кручения $x_{l,0,1}$ *равен* p^n, *а при* $(i, \theta) \neq (l, 1)$ *элемент* $x_{i,0,\theta}$ *не является элементом кручения.*

При том же дополнительном условии получена оценка сверху.

Теорема 16. *Предположим, что* $\pi = \sqrt[l]{\zeta_{p^n} - 1}$, *где* $p \nmid l$. *Пусть*

$$d = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (p+1)p^{n-2}, & n > 1, \end{cases}$$

$s(i)$ *– наименьшее целое неотрицательное число, для которого выполнено*

$$p^{s(i)} i \geq (d+1)l,$$

и $\mu_{i,j} = s(i) + v_p(j) + n$. *Тогда при* $(i, j, \theta) \in I$, $j \neq 0$ *порядок элемента* $x_{i,j,\theta}$ *в* $VK_2'K$ *не превосходит* $p^{\mu_{i,j}}$.

Наконец, получена теорема о сравнении порядков различных образующих без их явного вычисления.

Теорема 17. *При* $0 < (j, i) < \frac{p}{p-1}\overline{e}_K$, $p \nmid i$, $j \neq 0$ *обозначим через* $r_{i,j}$ *порядок элемента* $\{1 + \pi^i t^j, t\}$ *в* $VK_2'K$, *а при* $0 < (j, i) < \frac{p}{p-1}\overline{e}_K$, $p \mid i$, $i > 0$, $p \nmid j$ *обозначим через* $r_{i,j}$ *порядок элемента* $\{1 + \pi^i t^j, \pi\}$ *в* $VK_2'K$. *Тогда числа* $r_{i,j}$ *обладают следующими свойствами.*

1) Для любого $\theta \in K^{(0)}$, $\theta \neq 0$ *порядок элемента* $x_{i,j,\theta}$ *в* $VK_2'K$ *равен* $r_{i,j}$.

2) Значение $r_{i,j}$ *зависит только от* i, $v_p(j)$ *и* $\mathrm{sgn}(j)$.

3) Для $p \nmid i$, $j \neq 0$ *выполнено* $r_{i,j} \leq r_{i,jp} \leq p r_{i,j}$.

4) Множество значений $r_{i,j}$ *ограничено снизу, причем минимальное значение* $r_{i,j}$ *достигается при* $(i, j) = (\frac{pe_K^{(2)}}{p-1}, -1)$.

Обозначим минимальное значение $r_{i,j}$ *через* M_0.

5) Пусть $d(i)$ *– минимальное целое число, для которого* $p^{d(i)} i \geq \frac{pe_K^{(2)}}{p-1}$, *тогда* $r_{i,j} \leq M_0 p^{d(i) + v_p(j)}$.

6) Для любого $r \geq M_0$, *являющегося степенью* p, *существует бесконечно много пар* (i, j), *таких, что* $r_{i,j} = r$.

Список литературы

[1] Б. М. Беккер, *Абелевы расширения полного дискретно нормированного поля конечной высоты*, Алгебра и анализ **3**(1991), 76–84.

[2] С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности* Изв. АН СССР. Сер. мат. **42**(1978), 1288—1321.

[3] С. В. Востоков, *Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля* Изв. АН СССР Сер. мат. **49**(1985), 283–308.

[4] И. Б. Жуков, *Структурная теорема для полных полей*, Тр. С.-Петербург. мат. общ-ва **3**(1995), 194—214.

[5] И. Б. Жуков, *Милноровские и топологические K-группы многомерных полных полей*, Алгебра и анализ **9**(1997),№1, 98–147.

[6] И. Б. Жуков, М. В. Коротеев, *Устранение высшего ветвления*, Алгебра и анализ **11** (1999), No 6, 153–177.

[7] И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия*, Тр. С.-Петербург. мат. общ-ва **3**(1995), 4-46.

[8] А. Н. Паршин, *Локальная теория полей классов* Труды мат. ин-та АН СССР **165**(1985), 143–170.

[9] И. Я. Сивицкий, *Кручение в K-группах Милнора локального поля* Мат. сб. **126**(1985), 576–583.

[10] J. E. Carrol, *On the torsion in K_2 of local fields*, Lect. Notes Math. **342**(1973), 464–473.

[11] H. Epp, *Eliminating wild ramification*, Invent. Math **19**(1973), 235–249.

[12] I. B. Fesenko, *Abelian local p-class field theory*, Math. Ann **301**(1995), 561–586.

[13] I. B. Fesenko, *Abelian extension of complete discrete valuation fields*, Number Theory Seminar (Paris, 1993-1994), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[14] K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups, I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A Math **26**(1979), 303–376.

[15] A. C. Merkurjev, *On the torsion in K_2 of local fields* Ann. Math. **118**(1983), 375–381.

[16] A. A. Suslin, *Torsion in K_2 of fields* K-theory **1**(1987), 5–29.

[17] J. Tate, *On the torsion in K_2 of fields* Alg. Number Th., Intern. Symp. Kyoto 1977, 243–261.

[18] I. Zhukov, *Higher dimensional local fields*, (Munster, 1999), Geom. Topol. Monogr., vol.3, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000, pp. 5–18.

Публикации автора по теме диссертации

1. О. Ю. Иванова, *Топологические K-группы двумерных локальных полей*, Зап. научн. семин. ПОМИ **343**(2007), 206–221.

2. О. Ю. Иванова, *Ранг топологической K-группы как $\mathbb{Z}_p$-модуля*, Алгебра и анализ **20** (2008), No 4, 87–117.

3. О. Ю. Иванова, *Порядки топологических образующих K-группы стандартного двумерного локального поля*, Зап. научн. семин. ПОМИ **356**(2008), 118–148.