Санкт-Петербургский государственный университет

*На правах рукописи*

Холубовски Вальдемар Марек

# Алгебраические свойства групп бесконечных матриц

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2007

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

| | |
|---|---|
| Научный консультант | доктор физико-математических наук<br>профессор Вавилов Николай Александрович |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>профессор Гордеев Николай Леонидович |
| | доктор физико-математических наук,<br>Пономаренко Илья Николаевич |
| | доктор физико-математических наук,<br>профессор Романовский Николай Семенович |
| Ведущая организация: | Московский государственный университет<br>им М.В.Ломоносова |

Защита состоится „.....“.................. 2008 г. в .... час. на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., д.28

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 191011, Университетская наб., д.7/9.

Защита будет проходить в Петербургском отделении Математического института имении В.А.Стеклова РАН по адресу: Санкт-Петербург, Наб. Реки Фонтанки, д.27.

Автореферат разослан „.....“.................. 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.232.29
доктор физико-математических наук, профессор

В.М.Нежинский

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.**

Бесконечные матрицы встречаются в разных разделах математики. Систематическое изучение началось в теории суммирования расходящихся последовательностей и рядов, в квантовой механике и теории решения бесконечных систем линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных.

В теории рядов рассматриваются преобразования последовательностей типа $(z_n) \to (z'_n) = \phi((z_n))$, где $z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k$. Преобразование $\phi$ задается при помощи бесконечной матрицы $a = (a_{ij})$. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование $\phi$ переводило любую сходящуюся последовательность в сходящуюся, найдены Кожимой.

Теория Гейзенберга—Дирака в квантовой механике использует решения двух линейных уравнений в бесконечных матрицах:

$$AX - XA = I \qquad AX - XD = 0$$

(первое уравнение называется уравнением квантования). Для нахождения решений используется теория спектров операторов в гильбертовых пространствах.

Бурное развитие теории линейных пространств бесконечной размерности наступило в начале XX века. Основания были заложены главным образом исследованиями Ивара Фредгольма и Вито Вольтерры. Они рассматривали теорию линейных уравнений с бесконечным числом уравнений и неизвестных с использованием представления в виде предела линейных уравнений с конечным числом уравенений и неизвестных, когда число уравнений и неизвестных становится бесконечным. Это привело к развитию теории интегральных уравнений. С другой стороны, работы Давида Гильберта, Джона фон Неймана, Эрхарда Шмидта и Фригеса Риса по теории интегральных уравнений послужили толчком к развитию теории линейных пространств бесконечной размерности. Это и привело к созданию теории банаховых и гильбертовых пространств.

Алгебраические свойства бесконечных матриц и бесконечномерных линейных или классических групп исследуются во многих статьях и монографиях. Это делается с разных точек зрения, среди которых мы отметим теорию ассоциативных колец и модулей, алгебраическую $K$-теорию, теорию алгебр Ли и алгебраических групп, теорию бесконечных групп, функциональный анализ (кольца операторов, спектральный анализ), элементарный анализ (теория функций, последовательности и ряды), теорию представлений, теорию моделей, бесконечную комбинаторику и теорию вероятностей.

Бесконечные матрицы мы можем складывать как обычные матрицы. Специфика бесконечных матриц полностью выявляется при попытке умножать их. А именно, умножение бесконечных матриц не всегда определено. В анализе, где используются комплекснозначные и вещественнозначные бесконечные матрицы, эту ситуацию преодолевают наложением на матрицы условий типа сходимости последовательностей коэффициентов в строках и столбцах. В алгебре рассматриваются матрицы с коэффициентами из произвольного ассоциативного кольца $R$ с единицей, тем самым накладываются другие условия конечности, типа конечнострочности или конечностолбцовости. Кроме того, умножение может быть определено, но бывает неассоциативным. В третьих, обратимость бесконечных матриц ведет себя странно, существуют, например, бесконечные матрицы имеющие бесконечное число обратных.

Алгебраический подход к изучению бесконечных матриц начался в 40-вых годах XX-того века с работ Р. Бэра, Н. Джекобсона, Дж. Макки, И. Амитцура и других. Сначала они изучали кольцо конечнострочных бесконечных матриц $\mathrm{M}_r(\infty, R)$ над кольцом $R$ (кольцо эндоморфизмов левого свободного модуля) и кольцо $\mathrm{M}_{rc}(\infty, R)$ конечнострочных и конечностолбцовых бесконечных матриц (кольцо непрерывных эндоморфизмов или кольцо эндоморфизмов with adjoint), которое появилось в исследовании счетномерных алгебр и других колец со свойствами конечности. Итоговая работа Н. Джекобсона о неприводимых модулях показала важность плотных подколец кольца $\mathrm{M}_r(\infty, R)$, т. е. колец, содержащих кольцо $\mathrm{M}(R)$ – состоящее из матриц имеющих только конечное число ненулевых элементов. Такие кольца и называются кольцами бесконечных матриц. Для многих математиков кольца бесконечных матриц служат только примерами патологий в кольцах. В монографиях бесконечные матрицы появляются главным образом в качестве контрпримеров. На первый взгляд бесконечные матрицы не имеют никакой обозреваемой структуры, возможно потому, что не удовлетворяют никаким условиям конечности (например, они никогда не являются односторонне нетеровскими). На самом деле, в работах многих математиков выявлена их богатая структура. Например, два унитальных кольца $R$ и $S$ Морита эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathrm{M}(R) \simeq \mathrm{M}(S) \Leftrightarrow \mathrm{M}_{bc}(\infty, R) \simeq \mathrm{M}_{bc}(\infty, S) \Leftrightarrow \mathrm{M}_{rc}(\infty, R) \simeq \mathrm{M}_{rc}(\infty, S) \Leftrightarrow \mathrm{M}_r(\infty, R) \simeq \mathrm{M}_r(\infty, S)$ (здесь $\mathrm{M}_{bc}(\infty, R)$ обозначает кольцо всех матриц, у которых все ненулевые элементы только в конечном числе столбцов). Кольца $\mathrm{M}_r(\infty, R)$ и $\mathrm{M}_{rc}(\infty, S)$ всегда неизоморфны, существуют кольца $R$, $S$ такие, что $R \simeq \mathrm{M}_r(\infty, R)$ и $S \simeq \mathrm{M}_{rc}(\infty, S)$. Для групп Пикара имеем изоморфизмы $Pic(R) \simeq Pic(\mathrm{M}(R)) \simeq Pic(\mathrm{M}_r(\infty, R))$.

Исследования колец эндоморфизмов естественным образом возбудили интерес и к группам автоморфизов бесконечномерных модулей. Они интенсивно начались изучатся в работах Капланского, Кадисона, Маки и Розенберга 1950-х годов. В громадном количестве работ рассматривались различные группы бесконечных матриц. Два крайних условия конечности, накладываемые на бесконечные матрицы (они и наиболее широко обсуждались в литературе) это:

$\mathrm{GL}(R)$ — стабильная полная линейная группа, которая является индуктивным пределом групп $\mathrm{GL}(n,R)$ относительно естесвенных вложений;

$\mathrm{GL}_c(\Omega,R)$ — группа автоморфизмов правого модуля $R^\Omega$ (соответственно $\mathrm{GL}_r(\Omega,R)$ для левого модуля ${}^\Omega R$), где $\Omega$ – бесконечное индексное множество.

$\mathrm{GL}(R)$ это не аналог стабильного кольца $M(R)$, которое не имеет единицы, а его расширения посредством добавления скалярных матриц. Элементами стабильной группы являются матрицы, которые формально бесконечны, но в действительности лишь в конечном числе мест отличаются от единичной матрицы. Эта группа устроена, в принципе, как конечномерные полные линейные группы $\mathrm{GL}(n,R)$, и даже проще. Она нашла широкое применение в алгебраической $K$-теории (достаточно посмотреть любую монографию по основам алгебраической $K$-теории). Именно эта группа является модельной для построения $K$-теории колец, однако, практически никакой специфики бесконечных матриц в ней не наблюдается.

Более интересным случаем, полностью выявляющим специфику бесконечных матриц, является группа $\mathrm{GL}_c(\Omega,R)$ (соответственно $\mathrm{GL}_r(\Omega,R)$), в матрицах она представляется такими конечностолбцовыми (соответсвенно конечнострочными) матрицами, обратные к которым тоже являются конечностолбцовыми (соответсвенно конечнострочными) матрицами. Надо отметить, что для бесконечных матриц условие конечности для обратной матрицы $a^{-1}$ совершенно не вытекает из соответсвующего условия на саму матрицу $a$, как показывает следующий пример:

$$a=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix},\ a^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}.$$

Матрица $a$ является конечнострочной, но обратная к ней не является конечнострочной. С другой стороны матрица $a$ имеет конечнострочною правую обратную к ней, именно:

$$\widehat{a}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}.$$

Группа $\mathrm{GL}_c(\Omega,R)$ является формальным аналогом групп $\mathrm{GL}(n,R)$, но фактически она устроена бесконечно сложнее. Следует отметить, что в случае бесконечного

$\Omega$, на самом деле, практически все результаты не зависят от мощности множества $\Omega$. Это значит, что уже случай группы $\mathrm{GL}_c(\mathbb{N}, R)$, индексированной натуральными числами, является модельным для исследования структуры и свойств бесконечномерных групп. В дальнейшем эту группу будем обозначать просто $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$

Среди условий конечности, накладываемых на бесконечные матрицы, отметим ещё следующие, встречавшиеся в литературе:

$\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ — группа конечностолбцовых и конечнострочных матриц, она является просто пересечением групп $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ и $\mathrm{GL}_r(\infty, R)$; самое интересное, что группы $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ и $\mathrm{GL}_r(\infty, R)$ максимальны и не содержатся в какой-то общей надгруппе;

$\mathrm{GL}_b(\infty, R)$ — группа, состоящая из матриц $a$ конечной ширины, то-есть таких, для которых существует такое $m$, что все элементы матриц $a$ и $a^{-1}$ вне диагональной полосы ширины $m$ нулевые;

$\mathrm{GL}_{bc}(\infty, R)$ — финитарная группа, состоящая из всех матриц $a$, для которых все ненулевые элементы матрицы $a - e$ находятся в конечном числе строк (здесь $e$ – единичная матрица).

Группа $\mathrm{GL}_{bc}(\infty, R)$ и её подгруппы интенсивно изучались в работах по теории локально конечных групп в случае когда $R = K$ – конечное или локально конечное поле.

Группа $\mathrm{GL}_b(\infty, R)$ связана с алгебрами Ли, рассмотренными Вердье, её подгруппы, состоящие из периодических матриц, имеют отношение к алгебрам Каца—Муди и к группам конечных синхронных автоматов.

Исследование групп бесконечных матриц тесно связано с исследованием конечномерных линейных групп. Различные вопросы, связанные со структурой линейных групп, изучались уже К.Жорданом, Л.Диксоном, Б. ван дер Варденом, Г.Вейлем, Ж. Дьедонне и их многочисленными последователями в огромном количестве работ. Ко второй половине XX века сложилось несколько крупных направлений исследования линейных групп. Укажем те, которые имеют особенное отношение к бесконечным матрицам.

Традиционно самый большой интерес вызывают нормальные подгруппы. Центральный результат в этой области получен Х.Бассом, описавшим строение нормальных делителей стабильной группы $\mathrm{GL}(R)$, откуда получается описание на стабильном уровне строения нормальных делителей полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, R)$ над кольцами. Для нестабильной ситуации аналоги результата Басса для $\mathrm{GL}(n, R)$ были позднее получены в работах А.А.Суслина, Дж.Уилсона, А.З.Голубчика и некоторых других авторов. С другой стороны работы Р. Бэра и Н. Джекобсона, рассматривающие кольца эндоморфизмов бесконечномерных модулей (отметим здесь описание

Бэром двусторонних идеалов), и работы Р. Бэра и С. Улама, описывающие нормальное строение группы подстановок бесконечного множества, возбудили интерес к нормальному строению $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$. В работах А. Розенберга, Г. Максвела, Ю. Хаузен, Э. Робертсона, Д. Аррела описывались нормальные подгруппы или подгруппы, нормализуемые элементарными матрицами в группе $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ для различных классов колец. Оказалось, что, так как в результате Басса, они попадают в интервалы связанные с конгруэнцподгруппами соответсвующими двусторонним идеалам. И. Фаруки дал пример бесконечного множества несчетных цепей в решетке нормальных подгрупп группы $\mathrm{GL}_c(\infty, \mathbb{Z})$, обобщая определение конгруэнцподгруппы. Р. Бернс и И. Фаруки описали максимальные нормальные подгруппы в группе целочисленных матриц $\mathrm{GL}_c(\infty, \mathbb{Z})$, они естественным образом индуцированы гомоморфизмами $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ($p$ — простое).

Ряд авторов рассматривал подгруппы, определяемые в теоретико-групповых терминах: абелевы,разрешимые, нильпотентные, силовские и т.д.; основные достижения в этой области принадлежат в конечномерном случае Дж.Диксону, Б.Верфрицу, Д.А.Супруненко, В.П.Платонову, А.Е.Залесскому и другим алгебраистам минской школы. Для группы $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ аналогичные исследования проведены Б. И. Плоткиным, М. Р. Седнёвой, И. Д. Иванютой, Л. А. Курдаченко, И. Субботиным и другими.

Предметом постоянного интереса является описание линейных групп с помощью образующих и определяющих соотношений — особое внимание к этому вопросу было стимулировано работами 60-х годов Р.Стейнберга и Дж.Милнора по стабильной группе Стейнберга. В работах П. Вермеша и его учеников: Д. Айреша, К. Пастора, Й. Денеша исследовалось порождение стрингами разных групп бесконечных матриц, как и разложение в комплексное произведение подгрупп. В частности, они показали, что группа конечнострочных и конечностолбцовых матриц имеет ширину два относительно стрингов (диагональных матриц с конечными блоками на главной диагонали) над полем комплексных чисел. В последнее время В. Толстых решил проблему Бергмана, показывая, что существует натуральное $k$ такое, что полная линейная группа конечностолбцовых матриц над телом имеет конечную ширину не больше $k$ для произвольного множества образующих.

С теоретикомодельной точки зрения группа $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$ и её подгруппы исследовались в работах П. Неймана, Д. Макферсона, Д. Эванса, С. Томаса, Дж. Бергмана, М. Дросте, Р. Гебеля, В. Толстых и других. Они рассматривали в группе $\mathrm{GL}_c(\infty, K)$ в случае, когда $K$ — поле, подгруппы малого (счетного) индекса и максимальные подгруппы, направление тесно связанное с исследованием максимальных подгрупп конечных простых групп. Выяснилось, что некоторые типы максимальных подгрупп в конечномерном случае являются такими и бесконечном случае. Но, с другой стороны, появляются новые типы максимальных подгрупп, естественные для бесконечного случая, как стабилизаторы максимальных идеалов или фильтров, почти стабилизаторы подможеств той же мощности, что их дополнения. Отметим тоже, что группа $\mathrm{GL}_c(\infty, K)$ не является суммой счетной возрастающей последовательности своих собственных подгрупп, это вытекает из того, что она удовлетворяет свойству кофинальности.

После завершения классификации конечных простых групп внимание математиков привлек вопрос описания счетных локально конечных простых групп. Эти вопросы рассматривались в работах Хирша, Кловса, О. Кегеля, Б. Верфрица, Р. Хартли, А. Залесского, У. Мейерфранкенфельда, Ф. Лайнена, О. Пульизи, Б. Лашингера и других. Получено описание счетных локально конечных подгрупп в группе $\mathrm{GL}_{bc}(\infty, K)$ над конечным полем $K$.

Еще один важный аспект в исследовании линейных групп связан с изучением решетки $\mathrm{Lat}(G_0, G)$ подгрупп группы $G$, содержащих некоторую выделенную подгруппу $G_0$, — такую задачу обычно называют *описанием промежуточных подгрупп*. Интерес к этой задаче связан с проектом классификации максимальных подгрупп конечных простых групп. Для линейных групп над конечным полем эта проблема была решена полностью П.Клейдманом и М.Либеком. Для бесконечных полей, а также для разных типов колец вопросы, связанные с описанием решетки промежуточных подгрупп, рассматривались во многих сотнях работ, авторами которых являются Ж.Титс, А.Борель, Д.Дьокович, В.П.Платонов, К.Судзуки, Ли Шанчжи, Н.С.Романовский, Р.А.Шмидт, А.В.Степанов, Ли Фуан и многие другие. Следует отметить проблему описания надгрупп расщепимого максимального тора. Один из основных результатов представляемой работы относится к этому направлению изучения линейных групп.

Известная теорема А.Бореля и Ж.Титса говорит,что если $G_0$ — расщепимый максимальный тор группы Шевалле $G = \mathrm{G}(\Phi, K)$, то для каждой подгруппы $H$ решетки $\mathrm{Lat}(G, G_0)$ существует такое единственное замкнутое подмножество $S \subseteq \Phi$, что выполняются включения

$$\mathrm{G}(S) \leq H \leq \mathrm{N}(S),$$

где под $\mathrm{G}(S)$ понимается подгруппа, порожденная тором $G_0$ и всеми корневыми элементами $x_\alpha(\xi)$ при $\alpha \in S$ и $\xi \in K$, а под $\mathrm{N}(S)$ — нормализатор $\mathrm{G}(S)$ в группе $G$. Такая классификация весьма обычна при описании промежуточных подгрупп — удобно называть ее стандартной, говоря при этом, что подгруппы $\mathrm{G}(S)$ служат ее базисом.

При переносе теоремы Бореля–Титса на другие поля и кольца в работах разных авторов возник и далее стал общеупотребительным подход, связанный с рассмотрением особых матриц из идеалов и соответствующих им подгрупп — сетей идеалов и сетевых подгрупп, как они стали называться в работах З.И.Боревича и его учеников ленинградской-петербургской школы. Как частные случаи, работы большинства авторов включают в себя алгебраически замкнутые и конечные поля, но техника доказательства в них совершенно отличается от методов алгебраической геометрии и конечных групп. З.И.Боревич доказал, что если $K$ — произвольное поле, содержащее не менее 7 элементов, то решетка надгрупп диагональной группы $\mathrm{D}(n, K)$ в $\mathrm{GL}(n, K)$ допускает стандартное описание, базисом которого служат $D$-сетевые подгруппы $\mathrm{G}(\sigma)$. В дальнейшем З.И.Боревич и Н.А.Вавилов доказали, что решетка $\mathrm{Lat}(\mathrm{D}(n, R), \mathrm{GL}(n, R))$ описывается стандартно и для большинства полулокальных колец $R$ (не обязательно коммутативных).

В представляемой диссертации мы обобщаем сразу несколько из упомянутых здесь результатов. Следует сказать, что техника, развитая для этих вопросов, позволяет получить новые результаты и для других групп бесконечных матриц.

Таким образом, вопросы, рассматриваемые в диссертационной работе, тесно связаны с общим развитием структурной теории бесконечномерных линейных групп. Это и определяет актуальность темы диссертации.

**Цель работы.** Основной целью работы является исследование структуры подгрупп бесконечных матриц над произвольным ассоциативным кольцом. В рамках этой задачи требуется разработать технику работы с бесконечными матрицами. Следует исследовать, какие понятия и методы конечномерных групп можно перенести на случай групп бесконечных матриц, ввести новые понятия и методы, свойственные для бесконечных матриц. В этом же контексте особенно интересно построить аналог теории сетевых подгрупп, выработать правильные определения и методы.

**Методы исследований.** В работе используются аналоги традиционных методов теории линейных групп над кольцами, включая метод исследования подгрупп линейных групп при помощи сетей идеалов, применяемых в случае бесконечных матриц, выработаны новые понятия для работы с бесконечными матрицами (понятие роста), усовершенствованы методы работы с понятиями, раннее использованными в исследовании бесконечных матриц (стринги). Применяются также общие теоретико-групповые и теоретико-кольцевые методы.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты:

- введено в рассмотрение новое понятие роста натуральнозначных функций, позволяющее классифицировать подгруппы бесконечных матриц и других счетномерных алгебраических структур, описаны свойства решетки ростов;

- обобщены на случай произвольного ассоциативного кольца результаты о порождении стрингами важных классов групп бесконечных матриц, вычислена ширина относительно стрингов некоторых подгрупп группы бесконечных матриц;

- описаны с использованием бесконечных аналогов сетей и сетевых подгрупп промежуточные подгруппы в группе конечностолбцовых бесконечных матриц (содержащие клеточно-диагональные матрицы), в группе треугольных матриц и в группе Маклейна (содержащие диагональные матрицы), описаны параболические подгруппы группы Вершика—Керова;

- построено новое представление свободной группы бесконечными унитреугольными матрицами над кольцом характеристики нуль и $p > 2$, упрощающее доказательства классических теорем о свободных группах;

- доказано, что в группе бесконечных унитреугольных матриц над конечным полем почти все $k$-порожденные подгруппы являются свободными группами ранга $k$;

- доказано, что в полугруппе бесконечных треугольных матриц над конечным полем почти все $k$-порожденные подполугруппы являются свободными полугруппами ранга $k$;

- описаны новые подгруппы группы автоморфизмов свободной группы счетного ранга и относительно свободных групп, определены естественные для них множества порождающих;

- охарактеризованы свойства двух классов подгрупп группы автоморфизмов корневого графа счетной валентности.

**Теоретическая и практическая ценность.** Диссертация имеет теоретический характер. Введенные в ней понятия, развитые методы и полученные результаты применимы при исследовании структуры групп бесконечных матриц над различными классами колец. Материал, изложенный в диссертации, может быть использован при чтении специальных курсов по линейным группам.

**Апробация работы.** Результаты, полученные в представляемой работе, докладывались на международныой алгебраической конференции, посвященной памяти З.И.Боревича (Санкт-Петербург 2002), на международной конференции по теории групп "Groups St. Andrews"(Сант Эндрюс, Великобритания, 2001 и Оксфорд 2005), на международных конференциях "Groups and Group Rings"(Ustron 2003, Bedlewo 2005), на конференции по геометрической теории групп (Хайфа 2000), на алгебраических конференциях в Украине (Ужгород 2001, Киев 2001, Львов 2003), на конференции, посвященной памяти Д. А. Граве (Киев 2002). Результаты работы докладывались на алгебраических семинарах университетов Вирцбурга (2001), Эрланген (2001), Афин (2002), Барселоны (2003), Варшавы (2002, 2004, 2006), Вроцлава (2004), а также на петербургском городском алгебраическом семинаре им. Д. К. Фаддеева.

**Публикации.** Практически все результаты, полученные в диссертации, опубликованы в работах [1]–[12].

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, содержащих в общей сложности 19 параграфов, и списка литературы, насчитывающего 180 наименований. Общий объем работы 135 страниц текста.

# Содержание диссертации

Приведем основные определения и полученные результаты в том порядке, в каком они расположены в представляемой работе.

В первой главе мы подробно описываем основные объекты исследования. Она посвящена определению группы бесконечных конечностолбцовых матриц. Приведены основные результаты о ее подгруппах. Введено понятие роста натуральнозначных функций, описаны его свойства и применены для построения новых семейств подгрупп. Исследована ширина подгрупп относительно семейства стрингов.

В § 1 мы напоминаем определение кольца бесконечных матриц и подробно его обсуждаем. Мы даем примеры бесконечных матриц, которые обратимы и имеют много обратных, и в то же время являющихся делителями нуля. Кроме того мы приводим примеры верхних треугольных матриц, обратные к которым являются нижними треугольными и которые имеют необратимые элементы на диагонали либо даже нули (см. **[4]**). Группа бесконечных матриц описывается в § 2, приведены определения известных ее подгрупп. Мы доказываем, что группа $\mathrm{GL}(R)$ является нормальной подгруппой группы $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$.

В § 3 мы напоминаем определение и основные свойства стабильной элементарной группы, порожденной элементарными трансвекциями, и относительной стабильной элементарной группы. Мы вводим понятие SL– трансвекции, которая отличается от единичной матрицы только в одной строке вне диагонали, и обобщенной трансвекции (блочно-диагональной матрицы, у которой все блоки суть элементарные трансвекции). Эти обобщения элементарной трансвекции более естественны в случае бесконечных матриц. Для обобщенных регулярных трансвекций мы находим коммутационные формулы.

Мы исследуем строение и нормальные подгруппы группы $\mathrm{UT}_{bc}(\infty, R)$ состоящей из всех унитреугольных матриц, у которых все ненулевые элементы над главной диагональю находятся в конечном множестве строк.

В § 4 вводится новое понятие роста натуральнозначных функций и описываются основные его свойства. В следующем § 5 понятие роста применяется для описания большого класса подгрупп группы бесконечных матриц. Понятие роста играет ключевую роль в теории групп. Для фиксированного множества образующих $S$ группы $G$, симметричного и не содержащего 1, мы определяем длину элемента $g$ как расстояние от $g$ до 1 в графе Кэли группы $G$ по отношению к $S$. Пусть $f(n)$ — количество элементов группы $G$ в шаре радиуса $n$ с центром в 1. Функция $f$ неубывающая и может быть распространена на все неотрицательные вещественные числа. На множестве всех таких неубывающих функций можно определить некоторое отношение эквивалентности, классы которого называются ростами. Рост не зависит от выбора $S$ и $f$, и, таким образом, является инвариантом самой группы $G$. Для конечно-порожденной бесконечной группы $G$ выполняется следующая трихотомия: $G$ имеет либо полиномиальный рост, либо промежуточный рост, либо экспоненциальный рост.

Для алгебр имеется аналог понятия группового роста, с примерно такой же конструкцией (под *алгеброй* мы будем понимать ассоциативную алгебру с единицей над полем). Пусть $A$ — конечно порожденная алгебра над полем $\mathbb{F}$ с множеством образующих $a_1, \ldots, a_m$. Положим $V^0 = \mathbb{F}$ и для $n \geq 1$ обозначим через $V^n$ подпространство, порожденное одночленами степени $n$ в образующих $a_1, \ldots, a_m$. Тогда $A = \cup_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_n := \mathbb{F} + V + V^2 + \ldots + V^n$. Функцию $d_V(n) = \dim_{\mathbb{F}}(A_n)$ можно рассматривать как функцию из $\Phi$ – множества всех возрастающих положительнозначных функций $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. На $\Phi$ вводится отношение эквивалентности, классы эквивалентности которого называются ростами. Рост $[d_V(n)]$ является инвариантом алгебры $A$.

Самым полезным для практических целей понятием размерности является размерность Гельфанда—Кириллова (называемая также $GK$-размерностью), которая определяется следующим образом

$$GK \dim(A) = \sup_V \overline{\lim} \log_n d_V(n),$$

где супремум берется по всем конечномерным подпространствам $V$ алгебры $A$. $GK$-размерность может равняться 0, 1, любому вещественному числу из интревала $[2, \infty)$ или $\infty$.

Дж. Ханна и К. С. О'Мира ввели и изучили новое понятие роста алгебр. Это понятие не использует рост алгебр в терминах образующих, но основано на подходящих представлениях бесконечных матриц. Из результата К. Гудирла, П. Менала и Х. Монкази следует, что каждую счетно-мерную алгебру $A$ над полем $F$ можно вложить в алгебру $A_{rc}(\infty, F)$ конечнострочных и конечностолбцовых матриц над $F$. В дальнейшем мы зафиксируем такое вложение и отождествим $A$ с ее образом в этом вложении. Все ненулевые матричные элементы матриц из $A$ расположены вблизи главной диагонали. Ханна и О'Мира ввели количественную меру того, насколько близко к диагонали можно собрать ненулевые элементы матрицы. Именно, кривую роста, которая ограничивает ширину полосы элемента алгебры.

Мы говорим, что $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $f(n) = n + h(n)$, является кривой роста для $a = (a_{ij}) \in A$, $i, j \in \mathbb{N}$, если $a_{nk} = 0 = a_{kn}$ для всех $k > f(n)$. Рост элемента $a$ не превосходит $h(n)$, или, короче, $a$ — элемент роста $O(h(n))$, если найдется такое

$c > 0$, что $c \cdot (n + h(n))$ является кривой роста для $a$. Алгебра $A$ имеет рост $O(h(n))$, если каждый элемент $a \in A$ имеет рост $O(h(n))$. Рост порядка $O(n)$ называется линейным. Основной результат можно сформулировать следующим образом: каждую счетно-мерную алгебру $A$ над полем $F$ можно вложить в $A_{rc}(\infty, F)$ как подалгебру линейного роста. Это позволяет определить размерность в полосе (или ленточную размерность) счетно-мерной алгебры как

$$\inf\{r \in \mathbb{R}, R \geq 0 \mid A \text{ вкладывается в } A_{rc}(\infty, F) \text{ с ростом } O(n^r)\}.$$

К сожалению, в общем случае это понятие размерности в полосе не очень полезно, так как множество

$$B(r) = \{a \in A_{rc}(\infty, F) \mid a \text{ имеет рост } O(n^r)\}$$

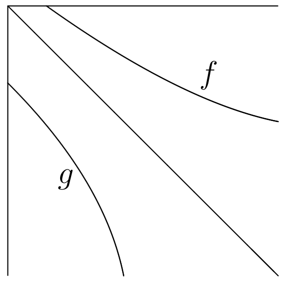
является подалгеброй в $A_{rc}(\infty, F)$, только если $r \in [0, 1]$. Ханна и О'Мира сформулировали задачу нахождения подходящего обобщения этого понятия для несчетномерных алгебр.

В параграфах 3 и 4 мы решаем эту задачу. А именно, мы обобщаем понятие размерности в полосе и роста групп. Это обобщение основано на идее, аналогичной той, которая использовалась в работе при изучении групп перестановок. Мы рассматриваем неубывающие функции из $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ в $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Классы этих функций относительно подходящего отношения эквивалентности называются ростами. Мы определяем две естественные операции на множестве $\Omega^\star$ ростов. По отношению к этим операциям $\Omega^\star$ образует решетку с интересными алгебраическими свойствами. Именно (см. **[11]**)

**Теорема 1** *Множество ростов $\Omega^\star$ с операциями $\omega_1 \vee \omega_2$ и $\omega_1 \wedge \omega_2$ образует решетку, обладающую следующими свойствами.*

> **a)** *В решетке $\Omega^\star$ существует наименьший элемент $\omega_0$ и наибольший элемент $\omega_\infty$.*
> **b)** *Для любого роста $\omega$ такого, что $\omega < \omega_\infty$, существует такая строго возрастающая последовательность ростов $\omega = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots$, что каждый рост $\omega_{i+1}$ экспоненциально больше $\omega_i$, $i = 0, 1, \ldots$.*
> **c)** *Решетка $\Omega^\star$ плотная, т.е. для любых $\omega_1 < \omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^\star$, существует такой рост $\omega_3 \in \Omega^\star$ что $\omega_1 < \omega_3 < \omega_2$.*
> **d)** *В решетке $\Omega^\star$ не существует ни атомов, ни коатомов.*
> **e)** *Для всех $\omega$, $\omega_0 < \omega < \omega_\infty$, существует несчетное семейство попарно несравнимых ростов, которые не сравнимы с $\omega$ (несчетные антицепи).*
> **f)** *Решетка $\Omega^\star$ дистрибутивная (и, таким образом, модулярная).*
> **g)** *Решетка $\Omega^\star$ полная.*

С каждой бесконечной матрицей $a$ можно связать нижнюю и верхнюю граничные функции $f(n)$ и $g(n)$. В некотором смысле функции $f$ и $g$ дают границы для ширины полосы вдоль главной диагонали, содержащей все ненулевые элементы матрицы $a$. Иными словами, все ненулевые элементы зажаты между двумя кривыми, определенными функциями $f, g$.




.

Эти границы естественным образом согласованы со сложением и умножением матриц. Это позволяет формулировать наши результаты на языке универсальной алгебры, так чтобы совместно охватить полугруппы, группы, кольца, алгебры и алгебры Ли.

В терминах ростов, связанных с данными нижней и верхней границами мы определяем четыре подмножества универсальной алгебры $X_c(\infty, R)$ конечностобцовых матриц. Эти подмножества являются универсальными подалгебрами (теорема 2). Кроме того, мы определяем две решетки подалгебр, изоморфных решетке $\Omega^\star$ (теорема 3). Мы доказываем, что для каждого подмножества $Y$ множества $X_c(\infty, R)$ существуют наименьшие росты $\omega_1, \omega_2$ такие, что $Y$ содержится в $X(\omega_1, \omega_2)$ — подалгебре, определенной этими ростами (теорема 4). Это наблюдение является основой для определения роста в полосе (или просто роста). Мы устанавливаем основные свойства роста.

В § 6 исследуется понятие стринга и порождаемость стрингами разных подгрупп группы бесконечных матриц. Мы доказываем результаты о ширине групп подстановок $\mathrm{Sym}(\omega) = \mathrm{Sym}(\mathbb{N}) \cap \mathrm{GL}(\omega)$ и верхнетреугольных матриц $\mathrm{UT}(\omega) = \mathrm{UT}_r(\infty, R) \cap \mathrm{GL}(\omega)$ относительно соответствующих стрингов. Мы говорим, что ширина группы $G$ относительно порождающего множества $S$ равна $k$, если каждый элемент из $G$ является произведением не больше чем $k$ элементов из $S$ и существует такой элемент, который не является произведением меньшего числа элементов из $S$.

Стрингом называется блочно-диагональная матрица с конечными блоками на диагонали. Имеем (см. **[11], [8], [9]**):

**Теорема 5** *Группы* $\mathrm{Sym}(\omega)$, $\mathrm{UT}(\omega)$ *и* $\mathrm{GL}_b(\infty, R)$ *порождаются стрингами. Ширина групп* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *и* $\mathrm{UT}(\omega)$ *равна* 2.

Пусть $\mathrm{Sym}(\widehat{\omega}) = \mathrm{Sym}(\mathbb{N}) \cap G(\widehat{\omega})$. Подгруппа $\mathrm{Sym}(\widehat{\omega}_0)$ называется группой финитных перестановок (подгруппой всех перестановок, которые сдвигают лишь конечное число элементов). Группа $\mathrm{Sym}(\widehat{\omega}_0)$ финитных перестановок нормальна в $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$

(предложение 13). Инволюция $a \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ называется *элементарной*, если все 2-циклы в $a$ имеют вид $(i, i+1)$. Группа $\mathrm{Sym}(\omega_0)$ порождается элементарными инволюциями (предложение 14).

Мы доказываем, что в случае поля группа $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, K)$ имеет ширину не больше 6 (предложение 17). Нам неизвестно, порождается ли группа $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ стрингами для произвольного кольца $R$. Но, группа порожденная стрингами всегда нормальна в $\mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ (предложение 18). Кроме того, для любого коммутативного кольца $R$ группа $\mathrm{E}(R)$ нормальна в $\mathrm{GL}_{str}(\infty, R)$ (предложение 19).

Бесконечное произведение $t = \prod_{i=1}^{\infty} t_i \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ элементарных трансвекций $t_i$ называем обобщенной трансвекцией, если существует последовательность $\{n_i\}$ ($n_i > 1$) натуральных чисел такая, что для каждой трансвекции $t_i = t_{k_i,l_i}(\alpha)$ выполняется условие $n_1 + \ldots + n_{i-1} < k_i < l_i \leq n_1 + \ldots + n_i$.

Матрица $a \in \mathrm{UT}(\infty, R)$ называется $n$-квазидиагональной, если $a_{ij} = 0$ для всех $i, j$ таких, что $j - i > n$, и $a_{i,i+n} \neq 0$ для хотя бы одного индекса $i$. Мы говорим, что $a$ квазидиагональна (или обобщенно якобиева или конечной ширины или ленточная), если $a$ $n$-квазидиагональна для некоторого $n$. Все матрицы $a$ из $\mathrm{UT}(\infty, R)$ такие, что $a$ и $a^{-1}$ квазидиагональны, образуют подгруппу $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$. Группа $\mathrm{UT}_b(\infty, R)$ порождается 1-квазидиагональными обобщенными трансвекциями (предложение 21).

Во второй главе понятия сети идеалов и сетевой подгруппы обобщаются на случай бесконечных матриц. Это позволяет применить эту технику к исследованию подгрупп группы конечностолбцовых бесконечных матриц, группы бесконечных верхних треугольных матриц, группы Маклейна, группы Вершика—Керова. Описывается также структура некоторых подгрупп, содержащих только стринги.

В § 7 мы даем определение сетей и сетевых подгрупп в случае бесконечных матриц. Приводим основные их свойства. Исследуются прямые пределы сетей и сетевых подгрупп. Пусть $R$ произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Система $\sigma = (\sigma_{ij}), \quad i, j \in \mathbb{N}$, двусторонних идеалов кольца $R$, называется сетью идеалов в $R$, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subset \sigma_{ij}$ при всех значениях $i, j, r \in \mathbb{N}$. Сеть $\sigma$ мы называем $D$-сетью, если $\sigma_{ii} = R$ при всех значениях $i$. Для сетей $\sigma$ и $\tau$ мы вводим отношение частичного порядка, полагая $\sigma \leq \tau$, если $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$ при всех значениях $i, j$. Легко видеть, что все сети в $R$ относительно введенного частичного порядка образуют полную решетку с наименьшим элементом — нулевой сетью (все идеалы нулевые) и наибольшей сетью — единичной сетью (все идеалы равны $R$).

Пусть $\mathrm{M}(\sigma)$ обозначает множество всех матриц $a \in \mathrm{M}_c(\infty, R)$, таких что $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ при всех значениях $i, j$. Если $\sigma$ является сетью, то $\mathrm{M}(\sigma)$ является кольцом, а множество $e + \mathrm{M}(\sigma) = \{e + a : a \in \mathrm{M}(\sigma)\}$ является мультипликативной системой. Ясно, что в случае $D$-сети $\sigma$ множество $e + \mathrm{M}(\sigma)$ совпадает с $\mathrm{M}(\sigma)$.

Максимальная подгруппа группы $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$, содержащаяся в $e + \mathrm{M}(\sigma)$, называется сетевой подгруппой соответствующей сети $\sigma$ и обозначается $\mathrm{G}(\sigma)$. Если $\sigma$ является $D$-сетью, то $\mathrm{G}(\sigma)$ называется также $D$-сетевой подгруппой.

Примерами сетевых подгрупп являются: группа верхних (или нижних) обратимых треугольных матриц, группа клеточно-диагональных обратимых матриц с фиксированными размерами клеток, в частности, группа диагональных матриц. В частности, единичная подгруппа и полная линейная подгруппа конечно столбцовых матриц — сетевые. Соответвующие им сети — это нулевая сеть (все идеалы нулевые) и единичная сеть (все идеалы совпадают с $R$).

Подгруппа $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями, содержащимися в $\mathrm{G}(\sigma)$, называется элементарной сетевой подгруппой, соответсвующей сети $\sigma$, и обозначается через $E(\sigma)$. Для сети $\sigma$ через $\mathrm{N}(\sigma)$ мы обозначаем нормализатор подгруппы $\mathrm{G}(\sigma)$ в группе $\mathrm{GL}_c(\infty, R)$. В случае стабильной группы $\Gamma = \mathrm{GL}(R)$ определяем сетевую подгруппу $\Gamma(\sigma)$ как пересечение $\mathrm{G}(\sigma) \cap \mathrm{GL}(R)$, а символом $N_\Gamma(\sigma)$ обозначаем нормализатор $\Gamma(\sigma)$ в группе $\mathrm{GL}(R)$. Мы доказываем

**Предложение 24** *Пусть $R$ — полулокальное кольцо, поля вычетов которого отличны от $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_5$ и $\mathrm{M}(2, \mathbb{F}_2)$. Тогда для любой подгруппы $H$ стабильной линейной группы $\Gamma = \mathrm{GL}(R)$, содержащей все диагональные матрицы, существует единственная $D-$сеть идеалов $\sigma$, такая, что $\Gamma(\sigma) \le H \le \mathrm{N}_\Gamma(\sigma)$.*

В § 8 дается описание подгрупп группы бесконечных конечностолбцовых матриц содержащих группу клеточно-диагональных матриц.

Пусть $R$ — комутативное кольцо с 1, $R^\star$ — группа обратимых элементов кольца $R$. Пусть $\nu$ — отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ такое, что все классы эквивалентности $I_1, \ldots, I_n, \ldots$ конечны. Наименьший из порядков $|I_1|, \ldots, |I_n|, \ldots$ этих классов будем обозначать через $h_\nu$. Если $i$ и $j$ эквивалентны относительно $\nu$, то пишем $i \sim j$. С эквивалентностью $\nu$ на $\mathbb{N}$ свяжем $D$-сеть $[\nu]$, определив ее условиями: $[\nu]_{ij}$ — единичный идеал $R$, если $i \sim j$, и $[\nu]_{ij}$ — нулевой идеал в противном случае. Соответствующую $D$-сетевую подгруппу $\mathrm{G}([\nu])$ обозначаем также через $\mathrm{D}(\nu)$. Группу $\mathrm{D}(\nu)$ будем называть группой клеточно-диагональных матриц заданного типа $\nu$. Элементарную сетевую подгруппу $E([\nu])$, соответствующую $D$-сети $[\nu]$ называем элементарной клеточно-диагональной группой типа $\nu$ и обозначаем также через $E(\nu)$.

Для произвольной $D$-сети $\sigma$ определим на $\mathbb{N}$ эквивалентность $\nu_\sigma$, считая индексы $i$ и $j$ эквивалентными относительно $\nu_\sigma$ тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = R$. Ясно, что $[\nu_\sigma] \le \sigma$, так что $D(\nu_\sigma) \le G(\sigma)$ и $E(\nu_\sigma) \le E(\sigma)$. Очевидно также, что $D(\nu_\sigma)$ (соответственно $E(\nu_\sigma)$) — это наибольшая клеточно-диагональная группа, содержащаяся в $G(\sigma)$ (наибольшая элементарная клеточно-диагональная группа, содержащаяся в $E(\sigma)$). Для $D$-сети $\sigma$ полагаем $h(\sigma) = h(\nu_\sigma)$.

Пусть $H$ подгруппа группы $G = \mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$, содержащая группу $E(\nu)$ элементарных клеточно-диагональных матриц типа $\nu$, где $h(\nu) \geq 2$. С подгруппой $H$ мы свяжем однозначно определенную $D$-сеть идеалов $\sigma$. Для упорядоченной пары различных индексов $i$ и $j$ через $\sigma_{ij}$ обозначим совокупность тех элементов из $\alpha \in R$, для которых $t_{ij}(\alpha) \in H$. Положим дополнительно $\sigma_{ii} = R$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Построенная $D$-сеть идеалов $\sigma$ называется $D$-сетью, ассоциированной с подгруппой $H$. Мы доказываем следующую теорему

**Теорема 6** *Пусть $R$ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, $G = \mathrm{GL}_{rc}(\infty, R)$ — полная линейная группа бесконечных конечно столбцовых матриц над $R$, $\nu$ — отношение эквивалентности на $\mathbb{N}$, в котором все классы эквивалентности конечные и для которого $h(\nu) \geq 3$. Пусть $E(\nu)$ — элементарная клеточно-диагональная подгруппа типа $\nu$, $H$ — подгруппа в $G$, содержащая группу $E(\nu)$. Тогда существует и притом единственная $D$-сеть $\sigma \geq [\nu]$, такая, что $\mathrm{E}(\sigma) \leq H \leq \mathrm{N}(\sigma)$. Сеть $\sigma$, для которой имеем последние включения, является $D$-сетью, ассоциированной с подгруппой $H$.*

В § 9 дается описание подгрупп группы бесконечных верхних треугольных матриц $\mathrm{T}(\infty, R)$, содержащих (или нормализуемых) стабильной группой диагональных матриц $\mathrm{D}(R)$, при некоторых ограничениях на ассоциативное кольцо $R$.

Пусть $R$ ассоциативное кольцо с единицей 1, $R^\star$ группа обратимых элементов кольца $R$. Группа $\mathrm{T}(\infty, R)$ состоит из всех бесконечных верхних треугольных матриц над кольцом $R$, у которых все диагональльные элементы обратимы, $\mathrm{D}(\infty, R)$ — подгруппа всех ее диагональных матриц. Тогда стабильная группа $\mathrm{D}(R)$ состоит из всех диагональных матриц, у которых только конечное число элементов на диагонали не равно 1. В этом параграфе мы рассматриваем только *верхние сети* $\sigma$ для которых $\sigma_{ij}$ тривиально для всех $i > j$. Если, кроме того, $\sigma_{ii} = R$ для всех $i \in \mathbb{N}$, мы называем $\sigma$ *верхней* $D-$*сетью.* Пусть $\mathrm{M}(\sigma)$ множество всех треугольных матриц $a$ таких, что $a_{ij} \in \sigma_{ij}$. Пусть $\mathrm{G}(\sigma)$ обозначает сетевую подгруппу, а $\mathrm{E}(\sigma)$ элементарную сетевую подгруппу группы $\mathrm{G}(\sigma)$, порожденную всеми элементарными трансвекциями $t_{ij}(\zeta)$, где $\zeta \in \sigma_{ij}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$. Главным результатом параграфа является следующая (см. **[1]**):

**Теорема 7** *Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с 1 такое, что существует элемент $\theta \in R^\star$, для которого $\theta - 1 \in R^*$ и $R$ аддитивно порождается элементами $R^\star$. Пусть $H$ подгруппа группы $\mathrm{T}(\infty, R)$ содержащая $\mathrm{D}(R)$. Тогда существует единственная верхняя $D-$сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ двусторонних идеалов кольца $R$ такая, что $\mathrm{D}(R) \cdot \mathrm{E}(\sigma) \leq H \leq \mathrm{G}(\sigma)$. Если, кроме того, подгруппа $H$ содержится в стабильной треугольной группе $T(R)$, то $H = \mathrm{G}(\sigma)$.*

При некоторых дополнительных условиях коммутативности мы можем доказать больше, именно (см. **[1]**):

**Теорема 8** *Если в предположениях Теоремы 7 элемент $\theta$ принадлежит центру $R^\star$ и $H$ является подгруппой группы $\mathrm{T}(\infty, R)$, нормализуемой подгруппой $\mathrm{D}(R)$, то существует единственная верхняя $D-$сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ идеалов $R$ такая, что $\mathrm{E}(\sigma) \leq H \leq \mathrm{G}(\sigma)$.*

В § 10 мы исследуем структуру нормальных подгрупп группы Маклейна с использованием сетей идеалов и сетевых подгрупп. Мы определим большую подрешетку $\Lambda$ решетки нормальных подгрупп группы Маклейна при некоторых ограничениях на ассоциативное кольцо $R$. Эта подрешетка состоит из сетевых подгрупп, соответсвующих нормальным сетям. В случае, когда $R$– поле, $|R| > 2$, при небольших ограничениях на множество идексов, $\Lambda$ изоморфна решетке монотонных функций и не зависит от основного поля.

Пусть $I$ — бесконечное линейно упорядоченное множество индексов. Пусть $\mathrm{T}_f(I, R)$ — группа всех $I \times I$ обратимых верхних треугольных матриц, только в конечном числе коэффициентов отличающихся от единичной матрицы. Обозначим через $\mathrm{D}_f(I, R)$ и $\mathrm{UT}_f(I, R)$ соответственно ее диагональную и унитреугольную подгруппы. Группа $\mathrm{UT}_f(I, R)$ называется (обобщенной) группой Маклейна. Группы Маклейна служат как примеры в общей теории групп, показывающие ограничения для многих результатов. Пусть $\sigma$ — сеть идеалов. Пусть $\mathrm{G}(\sigma)$ — сетевая подгруппа. Сеть $\sigma$ называется *нормальной сетью*, если для всех $i < r < j$, $i, j, r \in I$, мы имеем $\sigma_{ir} \subseteq \sigma_{ij}$ и $\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$. Пусть $\mathrm{G}(\sigma)$ — сетевая подгруппа. Главным результатом параграфа является **[5]**:

**Теорема 10** *Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с единицей $1$, которое аддитивно порождается обратиыми элементами и такое, что $1$ является суммой двух обратимых элементов. Пусть $H$ — подгруппа группы $\mathrm{UT}_f(I, R)$. Группа $H$ является нормальной подгруппой группы $\mathrm{T}_f(I, R)$ тогда и только тогда, когда $H = \mathrm{G}(\sigma)$ для некоторой нормальной сети $\sigma$.*

Мы описываем нормальные подгруппы при помощи монотонных функций. Пусть $R = K$ — поле (или простое кольцо) такое, что $|K| > 2$. Обозначим через $MF(I)$ множество всех функций $f : I \to I \cup \{\infty\}$, которые монотонны, т. е. для которых из $x < y$ следует, что $f(x) \leq f(y)$. Для $\mathrm{G}(\sigma)$ ($\sigma-$ нормальная сеть) мы определим $f_\sigma$ следующим образом: $f_\sigma(i) =$ минимальное $j$ такое, что $\sigma_{ij} \neq 0$ и $\infty$ в остальных случаях. Если $\sigma$ нормальная сеть, то $f_\sigma \in MF(I)$. Множество $MF(I)$ является решеткой относительно операций $(f_\sigma \wedge f_\tau)(i) = \max\{f_\sigma(i), f_\tau(i)\}$, $(f_\sigma \vee f_\tau)(i) = \min\{f_\sigma(i), f_\tau(i)\}$.

Мы имеем (см. **[5]**):

**Теорема 11** *Если $K$ — поле, $|K| > 2$, и каждое непустое подмножество интервала $[a, \infty]$ ($a \in I$) содержит минимальный элемент, то соответсвие $\mathrm{G}(\sigma) \mapsto f_\sigma$ определяет решеточный изоморфизм между решеткой $\Lambda = \{\mathrm{G}(\sigma) \in \mathrm{UT}_f(I, K) :\ \sigma$ — нормальная сеть $\}$ и решеткой $MF(I)$.*

Отметим, что результаты и методы этого параграфа можно использовать для описания подгрупп группы $\mathrm{T}_f(I,R)$, содержащих $\mathrm{D}_f(I,R)$, **[5]**:

**Теорема 12** *Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с $1$, которое аддитивно порождается обратимыми элементами и такое, что $1$ является суммой двух обратимых элементов. Пусть $H$ — подгруппа группы $\mathrm{T}_f(I,R)$ содержащая $\mathrm{D}_f(I,R)$. Тогда существует единственная верхняя $D-$сеть $\sigma=(\sigma_{ij})$ двусторонних идеалов кольца $R$ такая, что $H=\mathrm{G}(\sigma)$.*

§ 11 посвящен группе Вершика-Керова. Здесь показываем, что все параболические подгруппы группы Вершика-Керова $\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(R)$ (т. е. подгруппы содержащие $T(\infty,R)$ — группу бесконечных верхнетреугольных матриц) являются сетевыми подгруппами для широкого класса полулокальных колец $R$.

Группа $\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(R)$ определяется как подгруппа группы $\mathrm{GL}_c(\infty,R)$, состоящая из всех матриц, имеющих конечное число ненулевых элементов ниже диагонали (ясно, что $T(\infty,R)<\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(R)<\mathrm{GL}_c(\infty,R)$). Она рассматривалась Вершиком и Керовым в случае конечного поля $K$. Она имеет применения в теории представлений. $\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(K)$ является бесконечномерной, локально компактной, вполне несвязной, аменабельной в топологическом смысле и унимодулярной группой. Стабильная полная линейная группа $\mathrm{GL}(K)$ является ее плотной подгруппой, факторгруппа $\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(K)$ по центру является топологически простой группой.

Мы получили чисто алгебраическое описание параболических подгрупп группы $\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(R)$. Главным результатом является (см. **[2]**):

**Теорема 14** *Пусть $R$ полулокальное кольцо, в котором $1$ является суммой двух обратимых элементов. Если $H$ — параболическая подгруппа группы $\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(R)$, то существует единственная $T-$сеть $\sigma=(\sigma_{ij})$ двусторонних идеалов в $R$ такая, что $H=\mathrm{G}(\sigma)$.*

Используя эту теорему, мы можем доказать стандартные свойства параболических подгрупп в $\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(R)$ (см. **[2]**):

**Теорема 15** *Если $R$ — полулокальное кольцо, в котором $1$ является суммой двух обратимых элементов, то:*

(i) *Если $P_1$, $P_2$ — две параболические подгруппы в $\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(R)$ и $gP_1g^{-1}\subset P_2$ для некоторого $g\in\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(R)$, то $g\in P_2$ и $P_1\subset P_2$.*

(ii) *Любые две разные параболические подгруппы группы $\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(R)$ не сопряжены.*

(iii) *Любая параболическая подгруппа самонормализуема.*

Пусть $\mathrm{Sym}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ обозначает регулярное матричное представление группы перестановок натуральных чисел с конечным носителем. Мы имеем (см. **[2]**):

**Теорема 16** *Для любого поля $K$*

$$\mathrm{GL}_{\mathrm{VK}}(K)=\mathrm{T}(\infty,K)\cdot\mathrm{Sym}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})\cdot\mathrm{T}(\infty,K).$$

В § 12 мы определяем два типа групп бесконечных матриц, состоящеих только из стрингов. Пусть $x \in \mathrm{GL}(n, R)$. Обозначим через $\mathrm{D}(x)$ бесконечную блочно-диагональную матрицу $\mathrm{diag}\,(x, x, x, \ldots)$. Мы положим

$$\mathrm{GL}^*(R) = \{\mathrm{D}(x) : x \in \mathrm{GL}(n, R), n \in \mathbb{N}\}.$$

Ясно, что $\mathrm{GL}^*(R)$ является группой. Группа $\mathrm{GL}^*(R)$ имеет другое представление как прямой предел конечномерных групп. Пусть $m, n$ — натуральные числа такие, что $m$ делит $n$ $(m|n)$. Пусть $\phi_m^n$ — естественное вложение группы $\mathrm{GL}(m, R)$ в группу $\mathrm{GL}(n, R)$, заданное равенством $\phi_m^n(x) = \mathrm{diag}\,(x, x, \ldots, x)$. Это так называемые строго диагональные вложения. Ясно, что для любых натуральных $k, m, n$ таких, что $m|n$ и $n|k$, мы имеем $\phi_m^k = \phi_n^k \circ \phi_m^n$. Сумма групп $\mathrm{GL}(n, R)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно этих вложений совпадает с прямым пределом $\lim(\mathrm{GL}(n, R), \phi_m^n)$ и равна $\mathrm{GL}^*(R)$. Отметим, что $\mathrm{GL}^*(R)$ отличается от стабильной линейной группы $\mathrm{GL}(R)$, которая является прямым пределом при вложениях $\psi_m^n(x) = \mathrm{diag}\,(x, 1, \ldots, 1)$.

Пусть $\Sigma$ — множество бесконечных последовательностей $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ натуральных чисел, таких, что $n_i \geq 2$ и $n_i | n_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Если $\xi = (n_1, n_2, \ldots)$, то $\xi$-гомогенной полной линейной группой называем прямой предел индуктивной системы $(\mathrm{GL}(n, R), \phi_m^n)$ где $n, m$ пробегают только значения из последовательности $\xi$. Этот прямой предел будем обозначать $\mathrm{GL}(\xi, R)$ или $\mathrm{GL}(\xi)$. С каждой последовательностью $\xi$ можем связать супернатуральное число $s(\xi)$ следующим образом: $s(\xi) = 2^{s_1} \cdot 3^{s_2} \cdot \ldots$, где $s_i$ равно наибольшей степени числа $p_i$, делящей все $n_j$ или $s_i = \infty$, если такое число не существует. Оказывается, что прямые пределы однозначно определены числами $s(\xi)$. Разным супернатуральным числам отвечают неизоморфные пределы.

Все $\xi$-моногенные группы в $\mathrm{GL}^\star(R)$ составляют решетку, изоморфную решетке супернатуральных чисел. Решетка $\xi$-моногенных групп полная, дистрибутивная, имеет наименьший и наибольший элемент. Мы описываем нормальные подгруппы и подгруппы, содержащие диагональные матрицы в группе $\mathrm{GL}^*(R)$ и группе $\mathrm{GL}(\xi)$, используя соответсвующие элементарные группы и конгруэнцподгруппы.

III глава посвящена свободным подгруппам бесконечных унитреугольных групп. Известно, что конечномерные унитреугольные группы нильпотентны, а стабильная унитреугольная группа локально нильпотентна, тем самым они не содержат свободной подгруппы. Оказывается, что уже группа унитреугольных матриц содержит свободные подгруппы и их много, в точно определенном смысле.

В § 13 построено представление свободной группы ранга 2 бесконечными унитреугольными матрицами над кольцом целых чисел и кольцом вычетов по модулю $p$ $(p > 2)$. Это представление простое, а доказательства элементарны.

Во многих работах рассматривается ситуация, когда $\mathrm{gp}(a, b)$, подгруппа группы $G$ порожденная элементами $a, b$, является свободной группой ранга 2. Обычно $G$ является группой конечномерных матриц, перестановок счетного множества или преобразований эвклидова пространства.

На самом деле, мы покажем больше. Бесконечная верхняя унитреугольная матрица $A = (a_{ij})$ называется *$m$-квазидиагональной*, если $a_{ij} = 0$ для $j > i + m$ и $a_{k,k+m} \neq 0$ для некоторого $k$. Матрица $A$ называется *квазидиагональной*, если она $m$-квазидиагональна для некоторого $m$. Символом $\mathrm{UT}_b(\infty, \mathbb{Z})$ обозначим подгруппу группы $\mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z})$ состоящую из всех матриц $A$ таких, что $A$ и $A^{-1}$ являются квазидиагональными. Символом $A_{[s]}$ обозначим подматрицу матрицы $A$, которую получаем выбрасыванием первых $s$ строк и первых $s$ столбцов матрицы $A$. Положим $\mathrm{res}(A) = \{A, A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots\}$. Множество $\mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, \mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z}) : |\mathrm{res}(A)| < \infty$ и $|\mathrm{res}(A^{-1})| < \infty\}$ является подгруппой.

Пусть $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $a = \mathrm{diag}\,(a_2, a_2, a_2, \ldots)$, $b = \mathrm{diag}\,(1, a_2, a_2, \ldots)$.

**Теорема 17** **[6]** *Группа* $\mathrm{gp}(a, b)$ *является свободной (неабелевой) подгруппой ранга* 2 *группы* $\mathrm{UT}_b(\infty, \mathbb{Z}) \cap \mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, \mathbb{Z})$.

Приведем теперь пример свободной подгруппы в модулярном случае. Пусть $\varphi_p : \mathrm{UT}(\infty, \mathbb{Z}) \to \mathrm{UT}(\infty, p)$ — канонический гомоморфизм по модулю $p$ унитреугольной группы ($p$ - простое число). Из Теоремы 17 следует (см. **[6]**):

**Теорема 18** *Если* $\mathrm{gp}(a, b)$ *— группа из Теоремы 17, то* $\mathrm{gp}(\varphi_p(a), \varphi_p(b))$ *является свободным произведением* $C_p \star C_p$ *двух циклических групп порядка* $p$.

**Следствие 7** **[6]** *Для любого простого* $p > 2$ *группа* $\mathrm{UT}_b(\infty, p) \cap \mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, p)$ *содержит свободную подгруппу ранга* 2.

Отметим, что свободные подгруппы группы $\mathrm{UT}(\infty, q)$ были построены на языке конечных автоматов в работе Алешина для $q = 2$ (доказательство там неполное), в работе Бруннера и Сидки для $q = 2^n$ $(n \geq 2)$ и в работе Олийныка для $q = 2, 3$. Работа Олийныка и Сущанского содержит первый пример двух бесконечных матриц, которые порождают свободную подгруппу в $\mathrm{UT}_b(\infty, 2) \cap \mathrm{UT}_{\mathrm{res}}(\infty, 2)$.

Наше представление свободной группы имеет техническое преимущество в отношении к представлениям свободной группы поворотами трехмерного пространства (Хаусдорф), формальными рядами (Магнус) или квадратными матрицами степени 2 (Санов). Используя это представление в § 14, мы даем совсем простые доказательства аппроксимируемости свободных групп нильпотентными группами (теорема Магнуса) и конечными $p$-группами (теорема Ивасавы).

Напомним, что группа $G$ аппроксимируется группами со свойством $P$, если для каждого элемента $g \in G$, $g \neq 1$, существует нормальная подгруппа $N_g$ группы $G$, не содержащая $g$ и такая, что факторгруппа $G/N_g$ обладает свойством $P$. Иначе говоря, $G$ аппроксимируется группами со свойством $P$, если все нормальные подгруппы, чьи факторгруппы обладают свойством $P$, пересекаются по единице.

Мы даем тоже простое доказательство того факта, что коммутант 2- порожденной свободной группы является счетно порожденной свободной группой (теорема Леви).

В § 15 доказывается, что почти все $k$-порожденные подгруппы группы бесконечных унитреугольных матриц над конечным полем являются свободными группами ранга $k$.

Пусть $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ — группа всех бесконечных (индексированных множеством $\mathbb{N}$) верхних унитреугольных матриц над конечным полем порядка $p^s$ ($p$ - простое число). Множество $N_m$ всех матриц $a$ из $G$ таких, что первые $m$ столбцов $a$ такие, как у единичной матрицы $e$, составляет нормальную подгруппу группы $G$. Ясно, что $|G : N_m| < \infty$ и $G$ является проконечной группой как обратный предел групп $G/N_m \simeq \mathrm{UT}(m, p^s)$. Проконечная топология индуцирует метрику $d(x, y)$, относительно которой группа $G$ является полным метрическим пространством. То же самое верно и для группы $G^k = G \times \ldots \times G$, если рассматривать произведение метрик $d(x, y)$. Если $x \in G^k$, то символом $\langle x \rangle$ обозначим подгруппу группы $G$, порожденную всеми координатами элемента $x$. Положим

$$F = \{x \in G^k \,|\, \langle x \rangle \ \text{является свободной группой ранга } \ k\}.$$

Подмножество метрического пространства называется нигде не плотным, если его дополнение содержит открытое, плотное подмножество. Сумма счетного семейства нигде не плотных множеств называется множеством первой категории (в смысле Бэра). Теорема Бэра утверждает, что в полном метрическом пространстве дополнение множества первой категории является плотным множеством. Это значит, что в таком пространстве множества первой категории маленькие, например, все пространство не может быть представлено в виде суммы счетного семейства множеств первой категории.

Эпстейн показал, что *почти все* $k-$порожденные подгруппы связной, неразрешимой, конечномерной группы Ли являются свободными группами ранга $k$, здесь выражение почти все интерпретируется используя натуральную меру Хаара на группе. Диксон показал, что почти все $k-$порожденные подгруппы в группе подстановок счетного множества являются свободными группами ранга $k$ в натуральной топологии, определенной на группе подстановок. Батачаржи получила аналогичные результаты для обратных пределов сплетений нетривиальных групп. Мы доказываем

**Теорема 22 [3]** *Почти все $k-$порожденные подгруппы в группе $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ являются свободными группами ранга $k$, в том смысле, что множество $G^k \setminus F$ является множеством первой категории в $G^k$.*

Эта теорема показывает принципиальное отличие строения бесконечномерной унитреугольной группы $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$. Отметим, что конечномерная унитреугольная группа $\mathrm{UT}(m, p^s)$ конечна, а стабильная унитреугольная группа $\mathrm{UT}_\omega(p^s)$, как прямой предел конечных групп $\mathrm{UT}(m, p^s)$ при натуральных вложениях, локально конечная, тем самым они не содержат никаких свободных нециклических подгрупп. Группа $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$ содержит тоже много интересных несвободных подгрупп, например Нотингеймскую группу. Известно, что любая счетно порожденная про-$p$-группа вложима в $\mathcal{N}$, и тем самым в $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$. В частности, любая конечно порожденная резидуально конечная $p$-группа вложима в $\mathrm{UT}(\infty, p^s)$.

Используя результат Гарсайда и Найта, мы усиливаем наш результат, доказывая, что почти все счетно порожденные подгруппы группы $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ являются свободными подгруппами счетного ранга, и группа $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ содержит недискретную свободную подгруппу ранга два (следствие 8).

Наше доказательство Теоремы 22, в отличие от других доказательств, использует конкретные примеры свободных подгрупп. Оно вытекает из существования в $G$ конкретной счетной подгруппы, в которой много (обилие) свободных подгрупп. Именно (см. **[3]**):

**Теорема 23** *Группа $G = \mathrm{UT}(\infty, p^s)$ содержит счетную подгруппу $H$ такую, что пересечение $H^k$ с любым открытым шаром в $G^k$ содержит свободную подгруппу ранга $k$, заданную конкретными порождающими.*

В § 16 доказываются аналогичные результаты для случая полугруппы бесконечных треугольных матриц. Главным результатом является (см. **[7]**):

**Теорема 24** *Почти все $k-$порожденные подполугруппы полугруппы $S = \mathcal{T}(\infty, p^r)$ являются свободными полугруппами ранга $k$, иначе говоря, множество $S^k \setminus F$ является множеством первой категории в $S^k$.*

В IV главе мы применяем аналоги понятий введенных в предыдущих разделах к исследованию других "счетномерных"алгебраических структур, а именно группы автоморфизмов свободной группы счетного ранга, группы автоморфизмов корневого дерева счетной валентности, ассоциативной алгебры и алгебры Ли бесконечных матриц.

В § 17 рассматриваются подгруппы автоморфизмов свободной группы счетного ранга. Группа автоморфизмов свободной группы конечного ранга была исследована во многих работах. Я. Нильсен получил ее представление, используя элементарные автоморфизмы, называемые теперь автоморфизмами Нильсена. Его метод инициировал систематические исследования в этой области.

По сравнениию с конечным случаем группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} F_\infty$ свободной группы счетного ранга исследована слабо. Проблема классификации ее подгрупп очень трудная. Известны естественные подгруппы, содержащие внутренние, финитарные, ограниченные, триангулярные, подстановочные и диагональные автоморфизмы. Но даже для подгруппы ограниченных автоморфизмов не известна никакая подходящая система порождающих. Д. Солитар выдвинул гипотезу, что эта группа порождается бесконечными элементарными одновременными (симультанными) автоморфизмами Нильсена, но эта гипотеза пока не доказана.

В § 17, основанном на совместной работе с Ч. К. Гупта **[10]**, мы строим новые подгруппы $\mathrm{Aut}\, F_\infty$. Стандартное понятие ограниченности автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut}\, F_\infty$ состоит в существовании верхней грани $n$ на длину всех редуцированных слов вида $\alpha(x_i)$ и $\alpha^{-1}(x_i)$. Мы рассматриваем ограниченность с совсем другой точки зрения. Мы требуем только, чтобы каждый свободный порождающий $x_j$, появляющийся в $\alpha(x_i)$, находился вблизи $x_i$, в смысле, что $|i-j|$ не очень большое. Отметим, что сумма экспонент порождающей $x_j$ в $\alpha(x_i)$ может быть произвольной. Это очень отличается от понятий ограниченности, исследованных ранее. Мы вводим понятие стринга, которое реализует наше понятие ограниченности. Стринги являются аналогами бесконечных блочно-диагональных матриц с конечными блоками на главной диагонали. Множество всех конечных произведений стрингов $\mathcal{H}$ является группой, называемой группой стрингов. Она играет важную роль в дальнейшем. Мы доказываем, что $\mathcal{H}$ содержит группу, порожденную подстановочными и верхнетреугольными автоморфизмами, и изучаем некоторые параболические подгруппы $\mathcal{H}$. Мы описываем также большую решетку подгрупп $\mathcal{H}$, связанных с ростами. Главный результат параграфа говорит, что $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ порождается (по модулю $IA-$автоморфизмов) стрингами и нижнетреугольными матрицами. В последней части параграфа получаются аналоги этих результатов для некоторых других многообразий.

Наши результаты верны и для свободной группы несчетного ранга. При этом надо предположить, что семейство свободных порождающих вполне упорядочено. Это неудивительно, так как даже известная теорема Нильсена-Шрайера (подгруппа свободной группы свободна) требует такого упорядочения порождающих в случае бесконечного ранга. По аналогии с матричным случаем мы вводим понятие стринга. Пусть $\alpha$ автоморфизм $F_\infty$ следующего типа:

(1) существует разбиение $\{X_j | j \in \mathbb{N}\}$ множества порождающих $\{x_1, x_2, \ldots\}$ такое, что $X_1 = \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ и для всех $j > 1$ мы имеем $X_j = \{x_{n_j+1}, \ldots, x_{n_{j+1}}\}$, где $n_1 < n_2 < \ldots$ является строго возрастающей последовательностью натуральных чисел;

(2) для любого $k$ такого, что $n_j + 1 \le k \le n_{j+1}$, мы имеем $\alpha(x_k) \in \langle x_{n_j+1}, \ldots, x_{n_{j+1}} \rangle$.

Автоморфизм, удовлетворяющий условиям (1) и (2), называем стрингом.

Множество $\mathcal{H}$ всех конечных произведений стрингов является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\, F_\infty$ (предложение 39). Группа стрингов содержит подгруппу, порожденную всеми верхними треугольными и подстановочными автоморфизмами (предложение

40). Мы доказываем, что подгруппа верхних треугольных автоморфизмов содержит свободную подгруппу (предложение 38).

Существует несчетное семейство попарно несравнимых параболических подгрупп в $\mathcal{H}$ (предложение 41). Для любого роста $\omega$ определяется подгруппа $\mathcal{H}(\omega)$ и доказывается, что множество таких подгрупп изоморфно решетке ростов из параграфа 4 (предложение 42).

Главным результатом параграфа является **[10]**:

**Теорема 25** *Любой автоморфизм из* $\operatorname{Aut} F_\infty$ *является сложением некоторого* $IA$*-автоморфизма и автоморфизма из подгруппы, порожденной нижними треугольными и конечно столбцовыми автоморфизмами, т. е.* $\operatorname{Aut} F_\infty = \langle \mathcal{T}^-, \mathcal{K} \rangle \cdot \mathcal{A}$.

Мы доказываем тоже, что группа $\operatorname{Aut} F_\infty$ содержит два счетных семейства подгрупп: одно, состоящее из максимальных нормальных подгрупп, и второе, содержащее нормальные несравнимые подгруппы (предложение 45). В заключительной части мы переносим некоторые результаты на относительно свободные группы (предложение 47).

В § 18 исследуются автоморфизмы корневого дерева счетной валентности. Класс групп автоморфизмов корневых деревьев в последнее время привлек внимание многих математиков. Этот класс содержит важные примеры групп, например, некоторые не локально конечные, периодические группы, являющиеся контрпримерами к неограниченной проблеме Бернсайда, и примеры групп промежуточного роста, контрпримеры к проблеме Милнора.

Все эти примеры являются примерами групп автоморфизмов локально конечных деревьев. С другой стороны, их естественное обобщение, группа автоморфизмов корневого дерева счетной валентности, исследована слабо. В данном параграфе мы исследуем подгруппы этой группы. Описываем два семейства подгрупп, выделенные ростами (классами натуральнозначных функций над $\mathbb{N}$). Приводим основные свойства этих подгрупп (см. **[12]**).

Сначала в группе всех автоморфизмов $\operatorname{Aut} \mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ дерева счетной валентности $\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ вводим семейство автоморфизмов конечного типа, связанных с ростами. Мы говорим, что функция $f$ является $fin-$ограничением для автоморфизма $\tau \in \operatorname{Aut} \mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$, если $\tau_\emptyset(n) = \tau_\emptyset^{-1}(n) = n$ для всех $n > f(1)$, и $\tau_{i_1,\ldots,i_k}(n) = \tau_{i_1,\ldots,i_k}^{-1}(n) = n$ для всех $n > f(k+1)$. Если носитель подстановки $\tau_{i_1,\ldots,i_k}$ бесконечен, говорим, что подстановка $\tau_{i_1,\ldots,i_k}$ ограничена через $f(k+1) = \infty$.

Для любого роста $\omega$ множество всех $\tau \in \operatorname{Aut} \mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$, таких, что все перестановки $\tau_x$ $fin-$ограничены некоторыми функциями $f, f(n) + n \in \omega$, является группой, обозначаемой через $G_{fin}(\omega)$. Легко видеть, что $\operatorname{Aut} \mathcal{T}^{(\mathbb{N})} = G_{fin}(\omega_\infty)$, и имеем равенство

$$\cup_{d=2}^{\infty} \operatorname{Aut} \mathcal{T}^{(d)} = G_{fin}(\omega_0).$$

Решетка подгрупп $\{G_{fin}(\omega)\}_{\omega\in\Omega^\star}$ изоморфна решетке ростов $\Omega^\star$ (предложение 49). Для любого роста $\omega$ группа $G_{fin}(\omega)$ сферически транзитивно действует на сферах (уровнях) деревьа (предложение 50). Мы показываем, что для наименьшего роста $\omega_0$, группа $G_{fin}(\omega_0)$ порождается элементарными инволюциями (предложение 51).

Другое семейство называем автоморфизмами бесконечного типа. Именно, мы говорим, что подстановка $\pi \in \mathbb{N}$ ограничена функцией $f \in \Omega_\infty$, если для всех чисел $n$ мы имеем $\pi(n), \pi^{-1}(n) \leq f(n)$. Это определение ограниченности подстановки существенно отличается от $fin-$ограниченности. Ограниченная подстановка может иметь бесконечный носитель.

Мы говорим, что функция $f \in \Omega^\star$ ограничивает автоморфизм $\tau \in \operatorname{Aut}\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$, если $\tau_\emptyset(n), \tau_\emptyset^{-1}(n) \leq f(n)$ для всех натуральных чисел $n$ и

$$\tau_{i_1,\ldots,i_k}(n), \tau_{i_1,\ldots,i_k}^{-1}(n) \leq f(n)$$

для всех натуральных чисел $n$.

Для любого роста $\omega$ определяем подгруппу группы $\operatorname{Aut}\mathcal{T}^{(\mathbb{N})}$ следующим образом

$$G(\omega) = \{\tau \in \operatorname{Aut}\mathcal{T}^{(\mathbb{N})} : \tau \text{ ограничена некоторой } f \in \omega\}$$

Очевидно, что $\operatorname{Aut}\mathcal{T}^{(\mathbb{N})} = G(\omega_\infty)$. Мы показываем, что решетка подгрупп $\{G(\omega)\}_{\omega\in\Omega^\star}$ изоморфна решетке ростов $\Omega^\star$ (предложение 52). Для любого роста $\omega$ группа $G(\omega)$ имеет тривиальный центр и любой её автоморфизм является внутренним (предложение 54). Кроме того, группа $G(\omega_0)$ порождается всеми элементами $\tau$ такими, что $\tau_x$ является элементарной инволюцией для всех $x$ из первого уровня дерева (предложение 53).

В § 19, заключающем эту главу, описываются некоторые ассоциативные алгебры и алгебры Ли бесконечных матриц, связанные с ростами, и приведены результаты о порождении стрингами. Доказывается, что алгебра строго верхних (нули ниже и на главной диагонали) конечнострочных бесконечных треугольных матриц порождается стрингами (предложение 55), а ее подалгебра квазидиагональных матриц порождается нильпотентными элементами (предложение 56). Описываем результаты Ханнах и Омиры о ленточной размерности на языке введенного нами роста **[11]**.

В заключительной части описываем многочисленные примеры алгебр с помощью роста и даем набросок возможных обобщений.

## Работы автора по теме диссертации


[1] W. Hołubowski, *Subgroups of infinite triangular matrices containing diagonal matrices*, Publ. Math. Debrecen **59** (1-2), (2001) 45-50.

[2] W. Hołubowski, *Parabolic subgroups of Vershik-Kerov's group*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2579–2582.

[3] W. Hołubowski, *Most finitely generated subgroups of infinite unitriangular matrices are free*, Bull. Austral. Math. Soc. **66** (2002), 419–423.

[4] W. Hołubowski, *An inverse matrix of an upper triangular matrix can be lower triangular*, Discuss. Math. Gen. Algebra Appl. **22** (2002), No. 2, 161–166.

[5] W. Hołubowski, *A normal structure of McLain groups*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. **45** (2002), 171–177.

[6] W. Hołubowski, *Free subgroups of the group of infinite unitriangular matrices*, Internat. J. Algebra Comput. **13** (2003), No. 1, 81–86.

[7] W. Hołubowski, *The ubiquity of free subsemigroups of infinite triangular matrices*, Semigroup Forum **66** (2003), No. 2, 231–235.

[8] В. Голубовски, *Подгруппы бесконечных унитреугольных матриц*, Записки научных семинаров ПОМИ, том **338** (2006), 137–154.

[9] W. Hołubowski, *Groups of infinite matrices*, Proceedings of 'Groups St. Andrews 2005', Cambr. Univ. Press, London Math. Soc. Lect. Notes in Math. vol. **340** (2007), 491–495.

[10] C. K. Gupta, W. Hołubowski, *Automorphisms of a free group of infinite rank*, Алгебра и Анализ, том **19** (2007), No 2, 74–85.

[11] В. Голубовски, *Новая мера роста для групп и алгебр*, Алгебра и Анализ, том **19** (2007), No 4, 69–91.

[12] В. Голубовски, *Автоморфизмы корневых деревьев счетной валентности*, Записки научных семинаров ПОМИ, том **343** (2007), 199–205.