САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ХАССАН Инаам Р.

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙНОВ В МЕТОДЕ АДАМСА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.07 — Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2008

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор БУРОВА Ирина Герасимовна
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ЖУК Владимир Васильевич
	доктор физико-математических наук, профессор ВАГЕР Борис Георгиевич
Ведущая организация:	Научно- исследовательский Вычислительный центр Московского государственного университета им. М.В Ломоносова (НИВЦ МГУ)

Защита состоится 2 октября 2008 г. в 14 часов на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "......" .... 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, профессор А.А. Архипова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

При численном решении задачи Коши обычно предпочтение отдают одношаговым методам ввиду устойчивости вычислений, возможностью легко менять шаг сетки и отсутствием предварительного построения начала таблицы.

Методы Адамса сейчас употребляются реже методов Рунге-Кутта в связи с необходимостью вычисления начала таблицы и выбора более крупного шага интегрирования из-за меньшей точности при одинаковом порядке приближения. Интерполяционные методы Адамса точнее экстраполяционных, обладают устойчивостью, но требуют решения одного уравнения или системы в зависимости от решаемой задачи.

Полиномиальные интерполяционные сплайны, позволяющие решать интерполяционную задачу Эрмита с помощью линейной комбинации базисных сплайнов и значения приближаемой функции и ее производных в узлах сетки рассматривались в работах Ю.К.Демьяновича и И.Г.Буровой. Оценки погрешности решения задачи Коши численными методами с привлечением производных функции получены в работах С.М.Лозинского.

Представляется актуальным построить неявные одношаговые методы, по свойствам аналогичные интерполяционным методам Адамса, но обладающие свойством точности на некотором заданном множестве функций, что позволит в ряде случаев существенно уменьшить погрешность решения задачи Коши.

Цель диссертационной работы

Целью диссертации является построение одношаговых методов четвертого, шестого и восьмого порядков для численного решения задачи Коши; получение оценок погрешности решения на шаге сетки; составление алгоритмов и отладка соответствующих программ; построение новых семейств неполиномиальных эрмитовых сплайнов первой, второй и третьей высоты и определение погрешности приближения этими сплайнами.

Методы исследования

В диссертации используются методы теории функций вещественного переменного, методы линейной алгебры, теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для построения базисов минимальных сплайнов применен метод аппроксимационных соотношений.

Достоверность и обоснованность

Достоверность результатов подтверждена доказанными теоремами и проведенными многочисленными тестами. Результаты численных экспериментов приведены в диссертации.

Результаты, выносимые на защиту

1. Построены семейства неполиномиальных сплайнов первой, второй и третьей высоты четвертого, шестого и восьмого порядков аппроксимации соответственно; приближения этими сплайнами обладают свойством точности на заданном множестве экспоненциальных и полиномиальных функций; носители базис-

ных сплайнов занимают два соседних сеточных промежутка; получены выражения для погрешности приближения.

2. Построены следующие неявные одношаговые методы численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка (а также систем дифференциальных уравнений первого порядка):

2.1) с погрешностью пятого порядка на каждом сеточном промежутке;

2.2) с погрешностью седьмого порядка на каждом сеточном промежутке;

2.3) с погрешностью девятого порядка на каждом сеточном промежутке.

В каждом из перечисленных случаев получены представления и оценки погрешности для нескольких разновидностей предлагаемых методов.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Выделим основные:

1. Построены минимальные неполиномиальные интерполяционные сплайны первой, второй и третьей высоты четвертого, шестого и восьмого порядков аппроксимации со свойством точности на некотором заданном множестве экспоненциальных и полиномиальных функций. Приближения этими сплайнами обладают локальным интерполяционным базисом и удобны для решения интерполяционной задачи Эрмита. Получены выражения для погрешности приближения минимальными неполиномиальными сплайнами.

2. Построены неявные одношаговые методы численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка (а также систем дифференциальных уравнений первого порядка) дающие погрешность пятого, седьмого и девятого порядков на каждом сеточном промежутке. Получено представление и оценки погрешности для ряда разновидностей этих методов на сеточном промежутке.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер и представляет теоретический и практический интерес, может быть использована как в исследовательских, так и в обучающих целях. Полученные результаты могут быть применены для создания высокоэффективных алгоритмов решения различных прикладных задач. Результаты могут быть использованы при решении задач интерполяции и аппроксимации вещественных функций одной и многих переменных при сжатии и последующем восстановлении с заданной погрешностью больших объемов графической информации, при численном решении задачи Коши, а также при построении параллельных форм алгоритмов перечисленных здесь задач.

Апробация работы

Основные результаты были доложены на следующих конференциях:

1. Процессы управления и устойчивость. XXXVIII международная научная конференция аспирантов и студентов. С.–Петербург. Россия, 9–12 апреля 2007 г.

2. Нелинейный динамический анализ – 2007. Международный конгресс, С.–Петербург. Россия, 4–8 июня 2007 г.

3. Процессы управления и устойчивость. XXXIX международная научная конференция аспирантов и студентов. С.–Петербург. Россия, 7–10 апреля 2008 г.

4. Космос, астрономия и программирование (Лавровские чтения): международная научная конференция. С.–Петербург. Россия, 20–22 мая 2008 г.

Публикация результатов

Основные результаты опубликованы (см. раздел "Список опубликованных работ по теме диссертации" в конце автореферата) в работах [1–8].

В работе [1] научному руководителю принадлежат идея построения неявного одношагового метода решения задачи Коши для одного уравнения первого порядка с помощью неполиномиальных сплайнов первой высоты, формулировка леммы и идея ее доказательства. Диссертанту принадлежат проверка справедливости утверждения леммы; вывод расчетных формул и составление алгоритмов; проведение численных экспериментов, в том числе составление и отладка программы и получение численных результатов.

В работе [2] научному руководителю принадлежит методика построения неявного метода решения задачи Коши для одного уравнения первого порядка с помощью неполиномиальных сплайнов нулевой высоты. Диссертанту принадлежат вывод расчетных формул и составление алгоритмов; проведение численных экспериментов, в том числе составление и отладка программ и получение численных результатов.

В работе [3] научному руководителю принадлежат методика построения неполиномиальных сплайнов ненулевой высоты, обладающих свойством точности приближения на достаточно широком множестве функций; методика построения неявных одношаговых методов решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка с помощью неполиномиальных сплайнов первой и второй высоты. Диссертанту принадлежат вывод формул базисных неполиномиальных сплайнов первой высоты двух видов: обладающих свойством точности приближения на функциях $\varphi_i(x) = e^{-ix}$, $i = 0, 1, 2, 3$, а также на функциях $\varphi(x) = 1, x, e^x, e^{-x}$; вывод формул базисных неполиномиальных сплайнов второй высоты, обладающих свойством точности приближения на $\varphi_i(x) = e^{-ix}$, $i = 0, 1, \ldots, 5$, а также обладающих свойством точности на функциях $\varphi(x) = 1, x, e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}$; получение расчетных формул для методов пятого и седьмого порядков приближения на шаге сетки, а также составление алгоритмов, проведение численных экспериментов, в том числе составление и отладка программ и получение численных результатов.

В работе [4] научному руководителю принадлежат методика построения неполиномиальных сплайнов ненулевой высоты (в том числе первой, второй и третьей), приближение с помощью которых обладает свойством точности на некотором множестве достаточно гладких функций; идея и методика построения неявных одношаговых методов решения задачи Коши для системы уравнений первого порядка с помощью неполиномиальных сплайнов ненулевой высоты; методика построения оценки погрешности приближения функции неполиномиальными сплайнами ненулевой высоты и методика нахождения оценки погрешности построенных неявных одношаговых методов решения задачи Коши на шаге сетки. Диссертанту принадлежат получение неполиномиальных базисных сплайнов восьмого порядка аппроксимации третьей высоты двух видов: приближение с помощью которых обладает свойством точности на функциях $\varphi_j(x) = e^{-jx}$, $j = 0, 1, \ldots, 7$, а также на функциях

$\varphi(x) = 1,\ x,\ e^x,\ e^{-x},\ e^{2x},\ e^{-2x},\ e^{3x},\ e^{-3x}$; получение оценок погрешностей неявных одношаговых методов седьмого и девятого порядков на шаге сетки для решения задачи Коши в случае одного уравнения первого порядка; вывод расчетных формул и составление алгоритмов.

В работе [5] руководителю принадлежат методика построения неполиномиальных сплайнов первой высоты, приближение с помощью которых обладает свойством точности на достаточно широком множестве функций; методика получения погрешностей неполиномиальными сплайнами, методика получения расчетных схем неявных одношаговых методов решения задачи Коши для системы уравнений. Диссертанту принадлежат получение формул аппроксимации неполиномиальными сплайнами четвертого порядка первой высоты, приближение с помощью которых обладает свойством точности на функциях: $\varphi_i(x) = e^{-ix}, i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$; $\varphi_i(x) = e^{ix},\ i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, а также на функциях $\varphi(x) = 1,\ x,\ e^x,\ e^{-x}$; получение оценок погрешностей методов решения задачи Коши полученных с помощью этих сплайнов; составление и отладка программ решения дифференциальных уравнений как с помощью построенных методов, так и с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка; проведение численных экспериментов; сравнение результатов теоретической и численной погрешности.

Статья 3 опубликована в журнале, входящем в перечень ВАК на момент публикации.

Структура и объем работы

Диссертация объемом 162 страницы состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы и параграфы, и списка литературы; содержит 22 таблицы, 19 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. Первая глава носит вспомогательный характер. В ней рассматриваются основные сведения об интерполяционных минимальных неполиномиальных сплайнах, об интерполяционном методе Адамса решения задачи Коши и методах Рунге-Кутты.

Во второй, третьей и четвертой главах предлагаются методы численные решения задачи Коши с помощью минимальных неполиномиальных сплайнов первой высоты.

Пусть N, n, m — целые числа, $N \geq 2$, $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_N = X \leq b$.

Будем решать задачу Коши

$$y_i' = f_i(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)),\ x \in [x_0,\ X],$$

$$y_i(x_0) = y_i^0,\quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Предположим, что $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — достаточно гладкие функции своих аргументов, а решение этой задачи $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ существует, единственно и $y_i \in C^{(m+1)}[a, b]$. Рассмотрим интегральное тождество

$$y_i(x_{j+1}) = y_i(x_j) + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} y_i'(x)dx, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Обозначим $u_i(x) = y_i'(x)$.

2. Во второй главе рассматривается применение сплайнов четвертого порядка аппроксимации.

Подынтегральное выражение $u_i(x)$ заменим на соотношение

$$\widetilde{u}_k(x) = u_k(x_j)\omega_{j,0}(x) + u_k(x_{j+1})\omega_{j+1,0}(x) +$$
$$+ u'_k(x_j)\omega_{j,1}(x) + u'_k(x_{j+1})\omega_{j+1,1}(x),$$

где базисные функции $\omega_{j,i}(x)$ находим из условий

$$\widetilde{u}_k(x) \equiv u_k(x), \quad u_k(x) = \varphi_i(x), \quad i = 0,1,2,3.$$

Имеем

$$y_i(x_{j+1}) = y_i(x_j) + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \widetilde{u}_i(x)dx + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} r_i(x)dx,$$

где $r_i(x) = u_i(x) - \widetilde{u}_i(x)$.

Теперь

$$y_i(x_{j+1}) = y_i(x_j) + f_i(x_j, y_1(x_j), \ldots, y_n(x_j))v_{j,0} +$$
$$+ f_i(x_{j+1}, y_1(x_{j+1}), \ldots, y_n(x_{j+1}))v_{j+1,0} +$$
$$+ \widetilde{F}_i(x_j)v_{j,1} + \widetilde{F}_i(x_{j+1})v_{j+1,1} + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} r_i(x)dx,$$

где

$$\widetilde{F}_i(x) = \frac{\partial f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))}{\partial x} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))}{\partial y_k} f_k(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)),$$

$$i = 1, \ldots, n, \;\; v_{k,s} = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \omega_{k,s}(x)dx, \;\; k = j, j+1, \;\; s = 0,1.$$

Следовательно, неявный метод решения рассматриваемой задачи Коши можно записать в виде

$$y_i^{j+1} = y_i^j + f_i(x_j, y_1^j, \ldots, y_n^j)v_{j,0} + f_i(x_{j+1}, y_1^{j+1}, \ldots, y_n^{j+1})v_{j+1,0} +$$
$$+ \tilde{F}_i^j v_{j,1} + \tilde{F}_i^{j+1} v_{j+1,1}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

где искомыми являются числа y_i^j; в работе показано, что y_i^j можно рассматривать как приближенное значение $y_i(x_j)$.

2.1. *Оценка погрешности при* $n = 1$, $\varphi_i(x) = x^{i-1}$.

В этом случае обозначим $g(x,y) = f_1(x,y)$. Решаем задачу $y' = g(x,y)$, $y(x_0) = y_0$. Вычисляя интегралы от базисных функций $\omega_{j,i}(x)$, получаем $v_{j,0} = v_{j+1,0} = h/2$, $\;v_{j,1} = -v_{j+1,1} = h^2/12$.

Погрешность $r(x)$ принимает вид

$$r(x) = \widetilde{u}(x) - u(x) = \int\limits_{x_{j+1}}^{x_j} u^{\mathrm{IV}}(t)(x_j - t)^3 dt\ \omega_{j,0}(x) +$$

$$+3 \int\limits_{x_{j+1}}^{x_j} u^{\mathrm{IV}}(t)(x_j - t)^2 dt\ \omega_{j,1}(x) - \int\limits_{x_{j+1}}^{x} u^{\mathrm{IV}}(t)(x_j - t)^3 dt.$$

Применяя теорему о среднем к полученному выражению, далее интегрируя $r(x)$ по промежутку $[x_j, x_{j+1}]$, снова применяя теорему о среднем к полученному выражению, интегрируя и возвращаясь к переменной y, получаем

$$R = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} r(x)dx = h^5 \left(\frac{1}{8}\ y^{\mathrm{V}}(\xi_1) + \frac{1}{12}\ y^{\mathrm{V}}(\xi_2) - \frac{1}{5} y^{\mathrm{V}}(\xi_3) \right),$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 находятся между x_j и x_{j+1}.
Поэтому

$$|y^{j+1} - y(x_{j+1})| \leq \frac{49}{120} h^5 \|y^{\mathrm{V}}\|_{[x_j, x_{j+1}]},$$

где

$$\|y^{\mathrm{V}}\|_{[x_j, x_{j+1}]} = \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} |y^{\mathrm{V}}(x)|.$$

Заметим, что $|y^{j+1} - y(x_{j+1})| = 0$, если $y(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$.

2.2. *Оценка погрешности при* $n = 1$, $\varphi_i(x) = e^{-ix}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

В этом случае получаем

$$v_{j,0} = -\frac{-27e^h + 6h + 5 - 18e^h h + 27e^{2h} - 5e^{3h}}{6(-1 + e^h)^3},$$

$$v_{j,1} = \frac{(2 + 3e^h + 6e^h h - 6e^{2h} + e^{3h})e^{-h}}{6(-1 + e^h)^2},$$

$$v_{j+1,0} = \frac{27e^h - 5 + 18e^{2h} h - 6e^{3h} h - 27e^{2h} + 5e^{3h}}{-6(-1 + e^h)^3},$$

$$v_{j+1,1} = \frac{-3e^{2h} + 6e^h - 1 + 6e^{2h} h - 2e^{3h}}{6(-1 + e^h)^2}.$$

Обозначим $p(x) = u^{\mathrm{IV}}(x) + 6u'''(x) + 11u''(x) + 6u'(x)$.

Очевидно, что однородное дифференциальное уравнение $p(x) = 0$ имеет фундаментальную систему решений $\varphi_i(x) = e^{-ix}$, $i = 0, 1, 2, 3$. В диссертации получена оценка

$$r(x) = \widetilde{u}(x) - u(x) = \int\limits_{x_{j+1}}^{x_j} \frac{p(t)}{6} (1 - e^{t - x_j})^3 dt\ \omega_{j,0}(x) +$$

$$+\int\limits_{x_{j+1}}^{x_j} \frac{p(t)}{2} e^{t-x_j}(1-e^{t-x_j})^2 dt\ \omega_{j,1}(x) - \int\limits_{x_{j+1}}^{x} \frac{p(t)}{6}(1-e^{t-x})^3 dt.$$

Применяя теорему о среднем к полученному выражению, далее интегрируя $r(x)$ по промежутку $[x_j, x_{j+1}]$, снова применяя теорему о среднем к полученному выражению, интегрируя и возвращаясь к переменной y, получаем

$$R = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} r(x)dx = \frac{F_1\ \ q(\xi_1)}{6} v_{j,0} + \frac{F_2\ \ q(\xi_2)}{2} v_{j,1} - \frac{q(\xi)}{6} F_3,$$

где $\xi_i,\ i = 1, 2, 3$ находятся между x_j и x_{j+1},

$$q(x) = y^{\mathrm{V}}(x) + 6y^{\mathrm{IV}}(x) + 11y'''(x) + 6y''(x),$$

$$F_1 = \frac{1}{3}e^{3h} - \frac{3}{2}e^{2h} + 3e^h - h - \frac{11}{6},\quad F_2 = -\frac{1}{3}(e^h - 1)^3,$$

$$F_3 = \frac{1}{9}e^{3h} - \frac{3}{4}e^{2h} + 3e^h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{11}{6}h - \frac{85}{36}.$$

При равномерной сетке на промежутке $[a, b]$ при
$0 < h \le 1$ получаем

$$|y^{j+1} - y(x_{j+1})| \le h^5 K \|y^{\mathrm{V}} + 6y^{\mathrm{IV}} + 11y''' + 6y''\|_{[x_j, x_{j+1}]},\quad K \approx 2.68.$$

Заметим, что $|y^{j+1} - y(x_{j+1})| = 0$, если $y(x) = 1,\ e^{-x},\ e^{-2x},\ e^{-3x}$.

2.3. *Оценка погрешности при* $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = e^x$, $\varphi_4(x) = e^{-x}$ *и* $n = 1$.

В этом случае имеем $v_{j,0} = v_{j+1,0} = h/2$,

$$v_{j,1} = \frac{he^h - 2e^h + 2 + h}{2(e^h - 1)},\quad v_{j+1,1} = -\frac{he^h - 2e^h + 2 + h}{2(e^h - 1)}.$$

Обозначим $p(x) = u^{\mathrm{IV}}(x) - u''(x)$. Нетрудно видеть, что однородное дифференциальное уравнение $p(x) = 0$ имеет фундаментальную систему решений $\varphi_1(x) = 1,\ \ \varphi_2(x) = x,\ \ \varphi_3(x) = e^x,\ \ \varphi_4(x) = e^{-x}$. Получаем

$$r(x) = \widetilde{u}(x) - u(x) = \int\limits_{x_{j+1}}^{x_j} p(t)\left[t - x_j + \frac{e^{(x_j - t)} - e^{(t - x_j)}}{2}\right] dt\ \omega_{j,0}(x) +$$

$$+\int\limits_{x_{j+1}}^{x_j} p(t)\left[-1 + \frac{e^{(x_j - t)} + e^{(t - x_j)}}{2}\right] dt\ \omega_{j,1}(x) - \int\limits_{x_{j+1}}^{x} p(t)\left[t - x + \frac{e^{(x - t)} - e^{(t - x)}}{2}\right] dt.$$

Применяя теорему о среднем к полученному выражению, интегрируя $r(x)$ по промежутку $[x_j, x_{j+1}]$ и снова применяя теорему о среднем к полученному выражению, интегрируя и возвращаясь к переменной y, получаем

$$R = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} r(x)dx = \left(\frac{-h^2 + e^{-h} + e^h - 2}{2}\right)\ q(\bar{\zeta}_1)\frac{h}{2} +$$

$$+\left(h+\frac{1}{2}e^{-h}-\frac{1}{2}e^{h}\right)\ \left(\frac{h}{2}+\frac{h}{e^h-1}-1\right)q(\bar{\zeta_2})-$$
$$-\left(-\frac{1}{2}e^{-h}+\frac{1}{2}e^{h}-\frac{h^3}{6}-h\right)q(\bar{\zeta_3}),$$

где $q(x)=y^{\mathrm{V}}(x)-y'''(x)$, а $\bar{\zeta_1},\ \bar{\zeta_2},\ \bar{\zeta_3}$ находятся между x_j и x_{j+1}.

Отсюда при $0<h\le 1$ справедлива оценка

$$|y^{j+1}-y(x_{j+1})|\le h^5\ K\ \ \|\,y^{\mathrm{V}}-y'''\,\|_{[x_j,x_{j+1}]},\quad K\approx\frac{31}{1440}(e^{-1}+e)\approx 0.066.$$

Заметим, что $|y^{j+1}-y(x_{j+1})|=0$, если $y(x)=1,\ x,\ e^x,\ e^{-x}$.

2.4. Пусть N — целое число, $N\ge 2$, $x_0<x_1<\ldots<x_N=X$. Предполагаем, что существует решение задачи Коши

$$y'=g(x,y(x)),\ y(x_0)=y_0,\ x\in[x_0,\ X], \tag{3}$$

где $g(x,y)$ — четырежды непрерывно дифференцируемая функция по своим аргументам.

Приближение y_j к решению задачи (3) будем определять с помощью метода

$$y_{j+1}=y_j+g(x_j,y_j)v_{j,0}+g(x_{j+1},y_{j+1})v_{j+1,0}+$$
$$+\left(g'_x(x_j,y_j)+g'_y(x_j,y_j)g(x_j,y_j)\right)v_{j,1}+$$
$$+\left(g'_x(x_{j+1},y_{j+1})+g'_y(x_{j+1},y_{j+1})g(x_{j+1},y_{j+1})\right)v_{j+1,1}. \tag{4}$$

Пусть $h=x_{j+1}-x_j$.

Теорема 1. *При сформулированных выше предположениях для погрешности решения задачи Коши (3) на промежутке $[x_j,x_{j+1}]$ с помощью метода (4) справедливо неравенство*

1) $|y_{j+1}-y(x_{j+1})|\le\frac{49}{120}h^5\|y^{\mathrm{V}}\|_{[x_j,x_{j+1}]}$, *если* $v_{j,0}=v_{j+1,0}=h/2$, $v_{j,1}=-v_{j+1,1}=h^2/12$.

2) $|y_{j+1}-y(x_{j+1})|\le h^5K\|y^{\mathrm{V}}+6y^{\mathrm{IV}}+11y'''+6y''\|_{[x_j,x_{j+1}]}$, $K\approx 2.68$, *при*

$$v_{j,0}=-\frac{-27e^h+6h+5-18e^hh+27e^{2h}-5e^{3h}}{6(e^h-1)^3},$$
$$v_{j,1}=\frac{(2+3e^h+6e^hh-6e^{2h}+e^{3h})e^{-h}}{6(e^h-1)^2},$$
$$v_{j+1,0}=\frac{27e^h-5+18e^{2h}h-6e^{3h}h-27e^{2h}+5e^{3h}}{-6(e^h-1)^3},$$
$$v_{j+1,1}=\frac{-3e^{2h}+6e^h-1+6e^{2h}h-2e^{3h}}{6(e^h-1)^2}.$$

3) $|y_{j+1}-y(x_{j+1})|\le h^5K\|y^{\mathrm{V}}-6y^{\mathrm{IV}}+11y'''-6y''\|_{[x_j,x_{j+1}]}$, *при*

$$v_{j,0}=-\frac{-5+27e^h+18e^{2h}h-6e^{3h}h-27e^{2h}+5e^{3h}}{6(e^h-1)^3},$$

$$v_{j,1}=\frac{-3e^{2h}+6e^h-1+6e^{2h}h-2e^{3h}}{-6(e^h-1)^2},$$

$$v_{j+1,0}=\frac{+27e^h-6h-5+18e^hh-27e^{2h}+5e^{3h}}{6(e^h-1)^3},$$

$$v_{j+1,1}=-\frac{(2+3e^h+6e^hh-6e^{2h}+e^{3h})e^{-h}}{6(e^h-1)^2},$$

причём $K\approx 0.16$, *если* $0<h\le 0.3$, $K\approx 0.03$, *если* $0.3<h\le 1$.

4) $|y_{j+1}-y(x_{j+1})|\le h^5\ K\ \|y^{\mathrm{V}}-y'''\|_{[x_j,x_{j+1}]}$, $K\approx 0.066$, *при*

$$v_{j,0}=v_{j+1,0}=h/2,\ ,\ v_{j,1}=\frac{he^h-2e^h+h+2}{2(e^h-1)},\quad v_{j+1,1}=-\frac{he^h-2e^h+h+2}{2(e^h-1)}.$$

3. В третьей главе рассмотрено применение сплайнов шестого порядка аппроксимации.

Подынтегральное выражение $u_i(x)$, $x\in[x_j,x_{j+1}]$ в (1) заменим на соотношение

$$\widetilde{u}_i(x)=u_i(x_j)\omega_{j,0}(x)+u_i(x_{j+1})\omega_{j+1,0}(x)+u_i'(x_j)\omega_{j,1}(x)+$$
$$+u_i'(x_{j+1})\omega_{j+1,1}(x)+u_i''(x_j)\omega_{j,2}(x)+u_i''(x_{j+1})\omega_{j+1,2}(x),$$

где функции $\omega_{j,k}(x)$, $k=0,1,2$, находим из условий

$$\widetilde{u}_i(x)\equiv u_i(x),\quad u_i(x)=\varphi_s(x),\quad s=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

При этом предполагаем, что определитель системы уравнений, возникающий при таком подходе, отличен от нуля. Имеем

$$y_i(x_{j+1})=y_i(x_j)+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\widetilde{u}_i(x)dx+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}r_i(x)dx,$$

где $r_i(x)=u_i(x)-\widetilde{u}_i(x)$. Положим $y_i^j\approx y_i(x_j)$. После интегрирования и отбрасывания погрешности получаем неявный метод нахождения y_i^{j+1}.

В случае одного уравнения решаем задачу $y'=g(x,y)$, $y(x_0)=y_0$. Будем находить $y_{j+1}\approx y(x_{j+1})$. Неявный метод нахождения y_{j+1} принимает вид

$$y_{j+1}=y_j+g(x_j,y_j)v_{j,0}+g(x_{j+1},y_{j+1})v_{j+1,0}+G_jv_{j,1}+G_{j+1}v_{j+1,1}+Q_jv_{j,2}+Q_{j+1}v_{j+1,2},\tag{5}$$

где

$$Q_k=g''_{xx}(x_k,y_k)+g''_{yy}(x_k,y_k)g^2(x_k,y_k)+2g''_{xy}(x_k,y_k)g(x_k,y_k)+g'_y(x_k,y_k)G_k,$$

$$G_k=g'_x(x_k,y_k)+g'_y(x_k,y_k)g(x_k,y_k),\ v_{k,s}=\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\omega_{k,s}(x)dx,\ k=j,j+1,\ s=0,1,2.$$

3.1. Приведем значения $v_{j,i}$ при некоторых $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$.

3.1.1. Наиболее простые выражения получаются при $\varphi_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$.

В этом случае вычисляя интегралы от базисных функций $\omega_{j,i}(x)$, имеем при $h = x_{j+1} - x_j$

$$v_{j,0} = v_{j+1,0} = \frac{h}{2}, \quad v_{j,1} = \frac{1}{10}h^2, \quad v_{j+1,1} = -\frac{1}{10}h^2, \quad v_{j,2} = v_{j+1,2} = \frac{1}{120}h^3.$$

3.1.2. При $\varphi_i = e^{-(i-1)x}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, получаем

$$v_{j,0} = -\frac{-325e^h + 1100e^{2h} + 47 - 300e^h h + 600e^{2h}h + 60h - 47e^{5h} - 1100e^{3h} + 325e^{4h}}{60(e^h - 1)^5}, \tag{6}$$

$$v_{j+1,0} = \frac{-47 + 325e^h - 1100e^{2h} + 300e^{4h}h - 60e^{5h}h - 600e^{3h}h + 47e^{5h} + 1100e^{3h} - 325e^{4h}}{-60(e^h - 1)^5}, \tag{7}$$

$$v_{j,1} = -\frac{-27e^{-h} + 180e^h h + 160e^h + e^{-2h} + 40 - 60h - 225e^{2h} + 59e^{3h} - 8e^{4h}}{40(e^h - 1)^5}, \tag{8}$$

$$v_{j+1,1} = \frac{-225e^{2h} + 59e^h + 160e^{3h} - 8 + 40e^{4h} - 180e^{3h}h + 60e^{4h}h + e^{6h} - 27e^{5h}}{40(e^h - 1)^4}, \tag{9}$$

$$v_{j,2} = \frac{3e^{-2h} - 30e^{-h} - 20 - 60h + 2e^{3h} + 60e^h - 15e^{2h}}{120(e^h - 1)^3}, \tag{10}$$

$$v_{j+1,2} = \frac{2 - 20e^{3h} - 15e^h + 60e^{2h} + 60e^{3h}h + 3e^{5h} - 30e^{4h}}{120(e^h - 1)^3} \tag{11}$$

3.1.3. Приведем еще значения $v_{j,i}$ при $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = e^{Ax}$, $\varphi_4(x) = e^{-Ax}$, $\varphi_5(x) = e^{2Ax}$, $\varphi_6(x) = e^{-2Ax}$, где $A > 0$. Вычисляя интегралы от базисных функций $\omega_{j,i}(x)$, имеем

$$v_{j,0} = v_{j+1,0} = \frac{h}{2},$$

$$v_{j,1} = \frac{3e^{3Ah}Ah + 3e^{2Ah}Ah + 3e^{Ah}Ah + 3Ah - 7e^{3Ah} + 9e^{2Ah} - 9e^{Ah} + 7}{4A^2(e^{Ah} - 1)^3},$$

$$v_{j+1,1} = -v_{j,1} = -\frac{3e^{3Ah}Ah + 3e^{2Ah}Ah + 3e^{Ah}Ah + 3Ah - 7e^{3Ah} + 9e^{2Ah} - 9e^{Ah} + 7}{4A^2(e^{Ah} - 1)^3},$$

$$v_{j,2} = v_{j+1,2} = \frac{Ahe^{2Ah} - 3e^{2Ah} + 4Ahe^{Ah} + 3 + Ah}{4A^3(e^{Ah} - 1)^2}.$$

3.2. *Оценка погрешности при* $n = 1$, $\varphi_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$. В этом случае после ряда преобразований получаем для $x \in [x_j, x_{j+1}]$

$$R = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} r(x)dx = \frac{y^{\mathrm{VII}}(\bar{\xi}_1)}{1440}h^7 + \frac{y^{\mathrm{VII}}(\bar{\xi}_2)}{1200}h^7 + \frac{y^{\mathrm{VII}}(\bar{\xi}_3)}{2880}h^7 + \frac{y^{\mathrm{VII}}(\bar{\xi}_4)}{840}h^7,$$

где $\bar{\xi}_i,\ i=1,2,3,4$ между x_j и x_{j+1}, отсюда

$$|y_{j+1}-y(x_{j+1})|\le Kh^7\|y^{\mathrm{VII}}\|_{[x_j,x_{j+1}]},\quad K\approx 0.0031,$$

где

$$\|y^{\mathrm{VII}}\|_{[x_j,x_{j+1}]}=\max_{x\in[x_j,x_{j+1}]}|y^{\mathrm{VII}}(x)|.$$

Заметим, что $|y(x_{j+1})-y_{j+1}|=0$ если $y(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6$, а также их линенейной комбинации.

3.3. Теорема 2. *В предположении $g\in C^6[x_0,\ X]\times\boldsymbol{R}$, для погрешности решения задачи Коши $y'=g(x,y(x)),\ y(x_0)=y_0,\ x\in[x_0,X]$ с помощью метода (3) на промежутке $[x_j,x_{j+1}]$ справедливо неравенство*

$$|y_{j+1}-y(x_{j+1})|\le Kh^7\|y^{\mathrm{VII}}\|_{[x_j,x_{j+1}]},\quad K\approx 0.0031,$$

здесь

$$v_{j,0}=v_{j+1,0}=\frac{h}{2},\quad v_{j,1}=\frac{1}{10}h^2,\quad v_{j+1,1}=-\frac{1}{10}h^2,\quad v_{j,2}=v_{j+1,2}=\frac{1}{120}h^3.$$

Если $v_{k,s},\ k=j,j+1,s=0,1,2$ задаются формулами (6)–(11), то

$$|y_{j+1}-y(x_{j+1})|\le Kh^7\|y^{\mathrm{VII}}+15y^{\mathrm{VI}}+85y^{\mathrm{V}}+225y^{\mathrm{IV}}+274y'''+120y''\|_{[x_j,\ x_{j+1}]},$$

где K— некоторая константа, $K>0$.

4. В четвертой главе рассматривается применение сплайнов восьмого порядка аппроксимации. Подынтегральное выражение $u_i(x),\ x\in[x_j,x_{j+1}]$ в соотношении (1) (с учетом замены $u_i(x)=y_i'(x)$) заменим на соотношение

$$\widetilde{u}_i(x)=u_i(x_j)\omega_{j,0}(x)+u_i(x_{j+1})\omega_{j+1,0}(x)+u_i'(x_j)\omega_{j,1}(x)+u_i'(x_{j+1})\omega_{j+1,1}(x)+$$
$$+u_i''(x_j)\omega_{j,2}(x)+u_i''(x_{j+1})\omega_{j+1,2}(x)+u_i'''(x_j)\omega_{j,3}(x)+u_i'''(x_{j+1})\omega_{j+1,3}(x),$$

где базисные функции $\omega_{j,k}(x),\ k=0,1,2$ находим из условий

$$\widetilde{u}_i(x)\equiv u_i(x),\quad u_i(x)=\varphi_s(x),\quad s=1,\ 2,\ \ldots,\ 8.$$

Положим $y_i^j\approx y_i(x_j)$. После интегрирования и отбрасывания погрешности получаем неявный метод нахождения y_i^{j+1}.

В случае одного уравнения решаем задачу $y'=g(x,y),\ y(x_0)=y_0$. Будем находить $y_{j+1}\approx y(x_{j+1})$. В рассматриваемом случае неявный метод нахождения y_{j+1} принимает вид

$$y_{j+1}=y_j+A_jv_{j,0}+A_{j+1}v_{j+1,0}+B_jv_{j,1}+B_{j+1}v_{j+1,1}+$$
$$+C_jv_{j,2}+C_{j+1}v_{j+1,2}+D_jv_{j,3}+D_{j+1}v_{j+1,3}. \tag{12}$$

где

$$A_k=g(x_k,y_k),\qquad B_k=g_x'(x_k,y_k)+g_y'(x_k,y_k)g(x_k,y_k),$$

$$C_k=g_{xx}''(x_k,y_k)+g_{yy}''(x_k,y_k)g^2(x_k,y_k)+2g_{xy}''(x_k,y_k)g(x_k,y_k)+g_y'(x_k,y_k)B_k,$$

$$D_k=g_{xxx}'''(x_k,y_k)+3g_{xxy}'''(x_k,y_k)g(x_k,y_k)+3g_{xyy}'''(x_k,y_k)g^2(x_k,y_k)+$$

$$+g'''_{yyy}(x_k,y_k)g^3(x_k,y_k)+3g''_{yy}(x_k,y_k)g(x_k,y_k)(B_k+3g''_{xy}(x_k,y_k)B_k+$$
$$+g'_y(x_k,y_k)(C_k+g'_y(x_k,y_k)B_k)).$$
$$v_{k,s}=\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\omega_{k,s}(x)dx,\ k=j,j+1,\ s=0,1,2,3.$$

4.1. *Значения $v_{j,s}$ при некоторых $\varphi_i(x)$, $i=1,2,\ldots,8$.* Пусть функции $\varphi_i(x)$ — достаточно гладкая, строго монотонная и производная от нее не обращается в нуль на $[x_0,\ X]$. Предполагаем, что вронскиан системы функций $\varphi_i(x)$, $i=1,\ 2,\ldots,8$ отличен от нуля на промежутке $[x_0,\ X]$.

4.1.1. Наиболее простые выражения получаются при $\varphi_i(x)=x^{i-1}$, $i=1,2,\ldots,8$. В этом случае вычисляя интегралы от базисных функций $\omega_{j,i}(x)$, получаем
$$v_{j,0}=v_{j+1,0}=\frac{h}{2},\quad v_{j,1}=\frac{3}{28}h^2,\quad v_{j+1,1}=-\frac{3}{28}h^2,$$
$$v_{j,2}=v_{j+1,2}=\frac{h^3}{84},\quad v_{j,3}=\frac{h^4}{1680},\quad v_{j+1,3}=-\frac{h^4}{1680}.$$

4.1.2. При $\varphi_i(x)=e^{-(i-1)x},\ \ i=1,2,\ldots,8$ имеем
$$v_{j,0}=-\frac{1}{420(-1+e^h)^7}(319+11319e^{2h}-30625e^{3h}-2793e^h+8820e^{2h}h-$$
$$-14700e^{3h}h-2940e^hh+420h-11319e^{5h}+2793e^{6h}-319e^{7h}+30625e^{4h}),\quad(13)$$
$$v_{j+1,0}=-\frac{1}{420(-1+e^h)^7}(2793e^h-8820e^{5h}h+2940e^{6h}h-11319e^{2h}-$$
$$-420e^{7h}h-319+30625e^{3h}+14700e^{4h}h+11319e^{5h}-2793e^{6h}+319e^{7h}-30625e^{4h}),\quad(14)$$
$$v_{j,1}=\frac{1}{2520(-1+e^h)^6}(8e^{-3h}+1638e^h+2900e^{-h}-190e^{-2h}-9891+$$
$$+44940e^{2h}h-24360e^hh+4620h+54117e^{2h}+537e^{6h}-4934e^{5h}+21475e^{4h}-65660e^{3h}),\quad(15)$$
$$v_{j+1,1}=\frac{1}{2520(-1+e^h)^6}(4934e^h+9891e^{6h}-1638e^{5h}-54117e^{4h}-24360e^{5h}h+$$
$$+44940e^{4h}h+4620e^{6h}h-537+65660e^{3h}-21475e^{2h}-2900e^{7h}+190e^{8h}-8e^{9h}),\quad(16)$$
$$v_{j,2}=-\frac{1}{420((-1+e^h)^5)}(-875e^h+322e^{-h}-38e^{-2h}-1260e^hh+420h+2e^{-3h}-$$
$$-539-11e^{5h}+1498e^{2h}+103e^{4h}-462e^{3h}),\quad(17)$$
$$v_{j+1,2}=-\frac{1}{420(-1+e^h)^5}(103e^h-420e^{5h}h+1260e^{4h}h-539e^{5h}-462e^{2h}-$$
$$-11-875e^{4h}+1498e^{3h}+322e^{6h}+2e^{8h}-38e^{7h}),\quad(18$$
$$v_{j,3}=\frac{4e^{-3h}+105-42e^{-2h}+252e^{-h}+420h+3e^{4h}-28e^{3h}+126e^{2h}-420e^h}{2520(-1+e^h)^4},\quad(19)$$

$$v_{j+1,3} = -\frac{3 + 126e^{2h} - 28e^{h} - 420e^{3h} + 105e^{4h} - 420e^{4h}h + 4e^{7h} - 42e^{6h} + 252e^{5h}}{2520(-1+e^{h})^4}, \tag{20}$$

4.1.3. При $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = e^{Ax}$, $\varphi_4(x) = e^{-Ax}$, $\varphi_5(x) = e^{2Ax}$, $\varphi_6(x) = e^{-2Ax}$, $\varphi_7(x) = e^{3Ax}$, $\varphi_8(x) = e^{-3Ax}$, где $A > 0$, после интегрирования получаем

$$v_{j,0} = v_{j+1,0} = \tfrac{h}{2},\ v_{j,1} = \frac{(q_1+q_2)}{36A^2(e^{Ah}-1)^5}, \quad v_{j+1,1} = -\frac{(q_1+q_2)}{36A^2(e^{Ah}-1)^5},$$

где $q_1 = 33e^{5Ah}Ah - 85e^{5Ah} + 51e^{4Ah}Ah + 276Ae^{3Ah}h - 490e^{3Ah}$,
$q_2 = 276e^{2Ah}Ah + 490e^{2Ah} + 51e^{Ah}Ah - 65e^{Ah} + 65e^{4Ah} + 33Ah + 85.$

$$v_{j,2} = \frac{q_3}{6A^3(e^{Ah}-1)^4}, \quad v_{j+1,2} = -v_{j,2} = -\frac{n_q}{6A^3(e^{Ah}-1)^4},$$

где $q_3 = 3e^{4Ah}Ah - 10e^{4Ah} + 18Ae^{3Ah}h - 10e^{3Ah} + 18e^{2Ah}Ah + 18e^{Ah}Ah + 10e^{Ah} + 3Ah + 10$,

$$v_{j,3} = \frac{q_4}{36A^4(e^{Ah}-1)^3}, \quad v_{j+1,3} = -v_{j,3} = -\frac{q_4}{36A^4(e^{Ah}-1)^3},$$

где $q_4 = 3Ah + 11 + 27e^{Ah} + 27e^{Ah}Ah + 27e^{2Ah}Ah - 27e^{2Ah} - 11e^{3Ah} + 3Ae^{3Ah}h.$

4.2. Оценка погрешности при $n = 1$, $\varphi_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, имеет вид

$$|y_{j+1} - y(x_{j+1})| \le h^9 K \|y^{\mathrm{IX}}\|, \quad K \approx .000058.$$

4.3. Пусть N — целое число, $N \ge 2$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_N = X$. Рассматриваем решение задачи Коши

$$y' = g(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0,\ x \in [x_0, X]. \tag{21}$$

Теорема 3. *В предположении* $g \in C^8[x_0,\ X] \times \boldsymbol{R}$ *для погрешности решения задачи Коши (21) на промежутке* $[x_j, x_{j+1}]$ *методом (12)*

$$\textit{для}\ \ v_{j,0} = v_{j+1,0} = \frac{h}{2}, \quad v_{j,1} = \frac{3}{28}h^2, \quad v_{j+1,1} = -\frac{3}{28}h^2,$$

$$v_{j,2} = v_{j+1,2} = \frac{h^3}{84}, \quad v_{j,3} = \frac{h^4}{1680}, \quad v_{j+1,3} = -\frac{h^4}{1680},$$

справедливо неравенство

$$|y_{j+1} - y(x_{j+1})| \le h^9 K \|y^{\mathrm{IX}}\|_{[x_j, x_{j+1}]}, \quad K \approx 0.000058.$$

Если $v_{k,s}$, $k = j, j+1, s = 0, 1, 2, 3$ *задаются формулами (13)-(20), то существует некоторая константа* K, $K > 0$, *что*

$$|y_{j+1} - y(x_{j+1})| \le h^9 K \times$$

$$\times \|y^{\mathrm{IX}} + 28y^{\mathrm{VIII}} + 322y^{\mathrm{VII}} + 1960y^{\mathrm{VI}} + 6769y^{\mathrm{V}} + 13132y^{\mathrm{IV}} + 13068y''' + 5040y''\|_{[x_j, x_{j+1}]}.$$

Список опубликованных работ по теме диссертации

[1] **Бурова И. Г., Хассан Инаам Р.** Применение сплайнов ненулевой высоты к решению задачи Коши // Процессы управления и устойчивость: Труды 38-й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов. СПб., 9-12 апреля 2007 г. / Под ред. А. В. Платонова, Н. В. Смирнова. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. С. 124–126.

[2] **Бурова И. Г., Хассан Инаам Р.** О решении задачи Коши с помощью неполиномиальных минимальных сплайнов // Нелинейный динамический анализ — 2007: Тезисы докладов международного конгресса, С.-Петерб., 4–8 июня 2007 г. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. С. 263.

[3] **Бурова И. Г., Хассан Инаам Р.** Применение минимальных интерполяционных сплайнов к решению задачи Коши // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1., 2007. Вып. 4. С. 114–117.

[4] **Бурова И. Г., Хассан Инаам Р.** О построении некоторых одношаговых методов для решения задачи Коши // Космос, астрономия и программирование (Лавровские чтения): Тр. междунар. науч. конф. Санкт-Петербург, 20-22 мая 2008 г. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. С. 194–199.

[5] **Бурова И. Г., Хассан Инаам Р.** Об оценках погрешностей некоторых одношаговых методов для решения задачи Коши с помощью неполиномиальных сплайнов // Методы вычислений. Вып. 22. СПб. 2008. С. 17-26.

[6] **Хассан Инаам Р.** О решении задачи Лотки-Вольтерра // Процессы управления и устойчивость: Тр. 39— й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов. СПб., 7-10 апреля 2008 г. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008 (апрель). С. 176–180.

[7] **Хассан Инаам Р.** О реализации метода сплайновых аппроксимаций для решения задачи Коши в среде MAPLE // Космос, астрономия и программирование (Лавровские чтения): Тр. междунар. науч. конф. Санкт-Петербург, 20–22 мая 2008 г. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. С. 255–258.

[8] **Хассан Инаам Р.** О решении задачи хищник-жертва // Методы вычислений. Вып. 22. СПб. 2008. С. 105-111.