Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Глушак Елена Николаевна

Линейные вложения графов в трехмерное евклидово пространство

01.01.04 — Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2008 г.

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Нежинский Владимир Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Панина Гаянэ Юрьевна
(Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук)

кандидат физико-математических наук
Подкорытов Семен Сергеевич
(Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук)

Ведущая организация: Коми научный центр Уральского отделения Российской академии наук

Защита состоится 2008 года в час. на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу:
198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

Защита будет проходить в Санкт-Петербургском отделении математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб.р.Фонтанки, д.27, ауд.311

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы и цель работы. Теория вложений - одна из важных ветвей геометрической топологии. Фундаментальным разделом теории вложений является теория кусочно-линейных вложений конечных графов в трехмерное евклидово пространство. Разные части этого раздела развиты неодинаково. Например, часть теории, относящаяся к изучению *кусочно-линейных* вложений одного или нескольких попарно непересекающихся многоугольников с точностью до кусочно-линейной изотопии, (классическая теория узлов и зацеплений) разработана хорошо. Напротив, положение с изучением *линейных* вложений одного или нескольких многоугольников (с точностью до кусочно-линейной, а тем более до линейной изотопии) вряд ли следует считать удовлетворительным: методы разработаны слабо и, как следствием этого, в литературе имеются лишь разрозненные результаты. Работ, в которых изучаются линейные вложения графов, отличных от многоугольников, с точностью до кусочно-линейной и линейной изотопий, автору не известно. Актуальной поэтому является задача развития этих отстающих частей теории.

Главная цель работы - продвинуть, насколько окажется возможным, решение этой задачи.

Методы исследований. В работе применяются стандартные методы теории вложений и теории графов.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты.

1. Расклассифицированы с точностью до линейной изотопии линейные вложения в $\mathbb{R}^3$ графов с числом вершин, не превосходящим пяти.

2. Построены таблицы попарно линейно неизотопных линейных вложений в $\mathbb{R}^3$ графов с шестью вершинами.

3. Получены оценки сверху и снизу на число (кусочно-)линейных изотопических классов линейных вложений графов в $\mathbb{R}^3$.

4. Определены и изучены зацепления выпуклых плоских замкнутых кривых с малым числом компонент.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории вложений графов в трехмерное евклидово пространство.

Апробация работы. Результаты работы докладывались: на международных конференциях "Александровские чтения 2006"(Москва, 2006 г.), "Algebraic Topology: Old and New - M.M.Postnikov Memorial Conference" (Bedlewo, Польша, 2007 г.), "The Algebra and Geometry around Knots and Braids" (Санкт-Петербург, 2007 г.); на Всероссийской научной конференции (Новгород, 2004 г.); в общегородском семинаре по дифференциальной и алгебраической топологии им. В.А.Рохлина ПОМИ РАН (2003-2008 гг.); в семинаре по геометрической топологии РГПУ им. А.И.Герцена (2003-2008 гг.).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в работах [1-7]. Работа [6] опубликована в издании, включенном в перечень ВАК на момент публикации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав (разбитых на параграфы), приложения и списка литературы, содержащего 31 наименование. Объем диссертации - 132 страницы.

Главные результаты работы

Графом называется конечный полиэдр размерности, не превосходящей единицы. Топологическое вложение графа G в пространство $\mathbb{R}^3$ называется *линейным*, если оно линейно на каждом ребре графа. Два линейных вложения одного и того же графа в пространство $\mathbb{R}^3$ называются *жестко изотопными*, если они лежат в одной компоненте линейной связности пространства всех линейных вложений этого графа в $\mathbb{R}^3$.

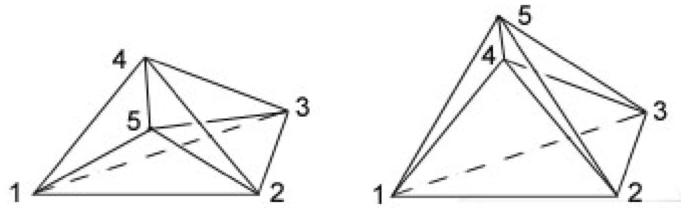

Рис. 1: Образы линейных вложений полного графа с пятью вершинами

Пусть G - граф. Подграф графа G называется *основным*, если он не содержит вершин степеней нуль и один и является наибольшим (по включению) из таких подграфов. Граф называется *основным*, если он совпадает со своим основным подграфом.

1. Результаты, относящиеся к графам, основные подграфы которых имеют не более шести вершин

Для графа G через $n(G)$ мы будем обозначать число вершин его основного подграфа.

Теорема A. *Пусть G - какой-нибудь граф.*

1. *Если $n(G) \leqslant 4$, то любые два линейных вложения графа G в пространство $\mathbb{R}^3$ жестко изотопны.*

2. *Если $n(G) = 5$ и основной подграф графа G не является полным, то любые два линейных вложения графа G в пространство $\mathbb{R}^3$ жестко изотопны. Если $n(G) = 5$ и основной подграф является полным, то существует ровно два класса жестко изотопных линейных вложений графа G в пространство $\mathbb{R}^3$. Образы основного подграфа графа G при вложениях, представляющих эти классы, изображены на рисунке 1.*

Пусть n и m - натуральные числа, такие что $m \leqslant n!$ *Диаграммой с n вершинами (и m сторонами)* называется подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, являющееся объединением n находящихся в общем положении точек плоскости (*вершин*) и m попарно различных отрезков (*сторон*), концы каждого отрезка совпадают с выбранными точками. Диаграмма называется *основной*, если степень каждой его вершины больше единицы.

Ниже на рис. 2-4 изображены основные диаграммы с шестью вершинами. В символе $D_{q,N}$ первый индекс (q) обозначает количество ребер, второй индекс (N) - порядковый номер этой диаграммы в таблице.

Ясно, что любая диаграмма является диаграммой какого-то графа, что граф с точностью до линейного гомеоморфизма диаграммой определен однозначно и что если диаграмма - основная, то граф, диаграммой которого она является, - основной.

Лемма 1. *Если граф с шестью вершинами является основным, то на рис. 2-4 имеется диаграмма, являющаяся диаграммой этого графа. Если два (основных) графа имеют диаграммы, изображенные на рис. 2-4, и эти диаграммы различны, то графы не являются линейно гомеоморфными.*

Для любого графа G через $\nu(G)$ мы будем обозначать число классов жестко изотопных линейных вложений $G \to \mathbb{R}^3$.

Обозначим через $G_{q,N}$ графы, диаграммами которых являются диаграммы $D_{q,N}$. В нижеследующей таблице в нечетных строках указаны графы $G_{q,N}$, в четных строках - соответствующие им натуральные числа $m_{q,N}$.

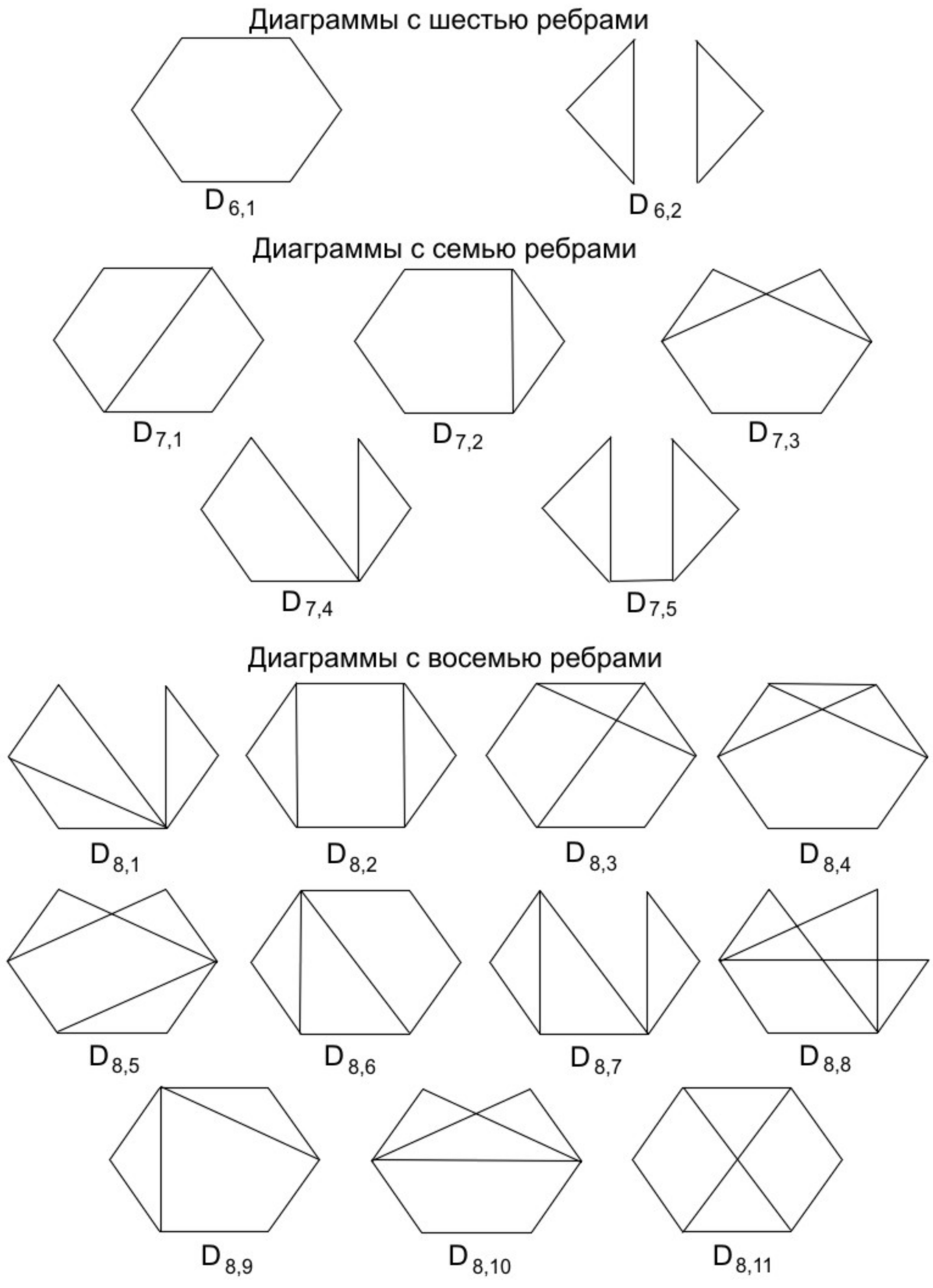

Рис. 2: Основные диаграммы с шестью вершинами

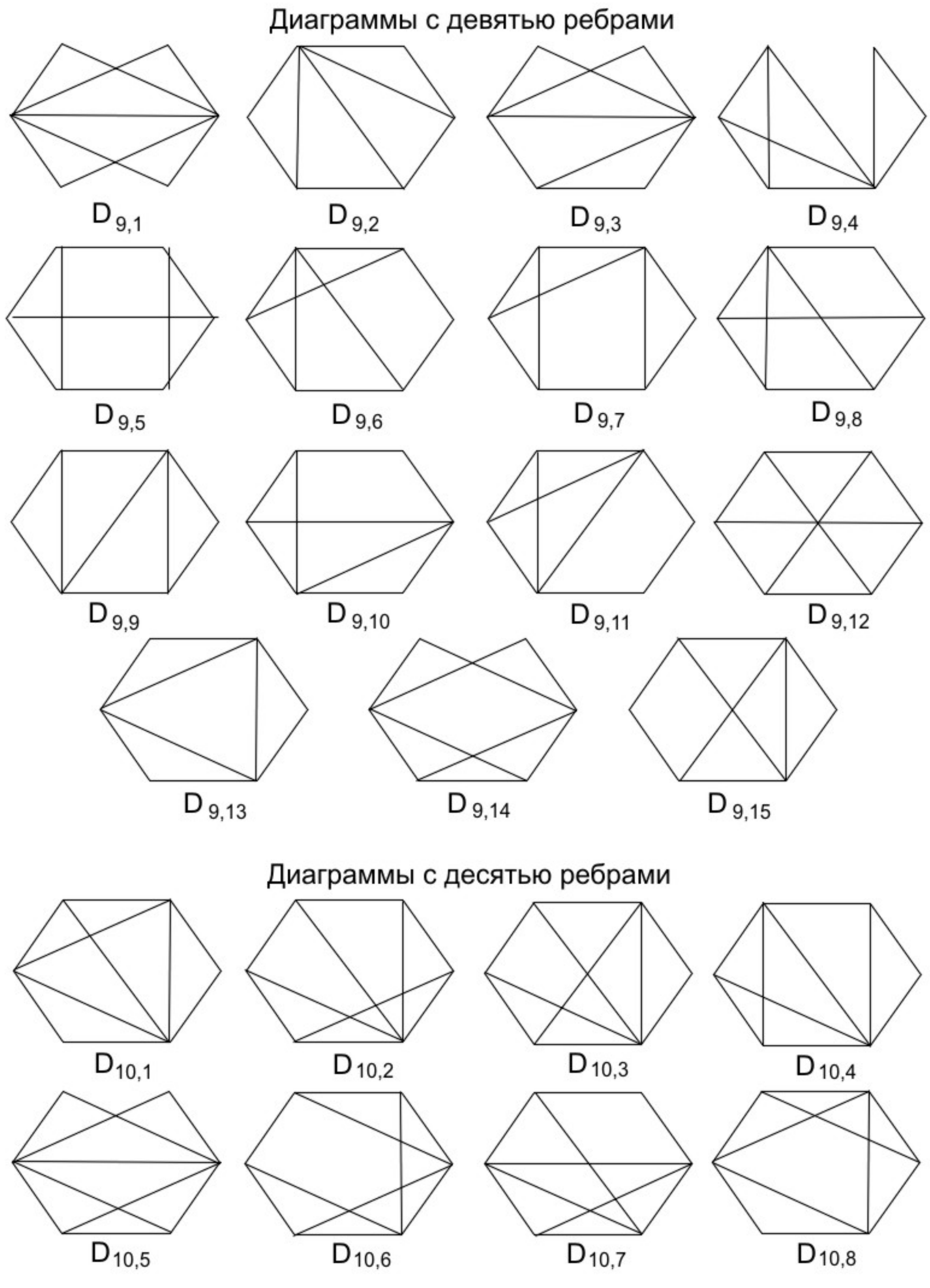

Рис. 3: Основные диаграммы с шестью вершинами (продолжение)

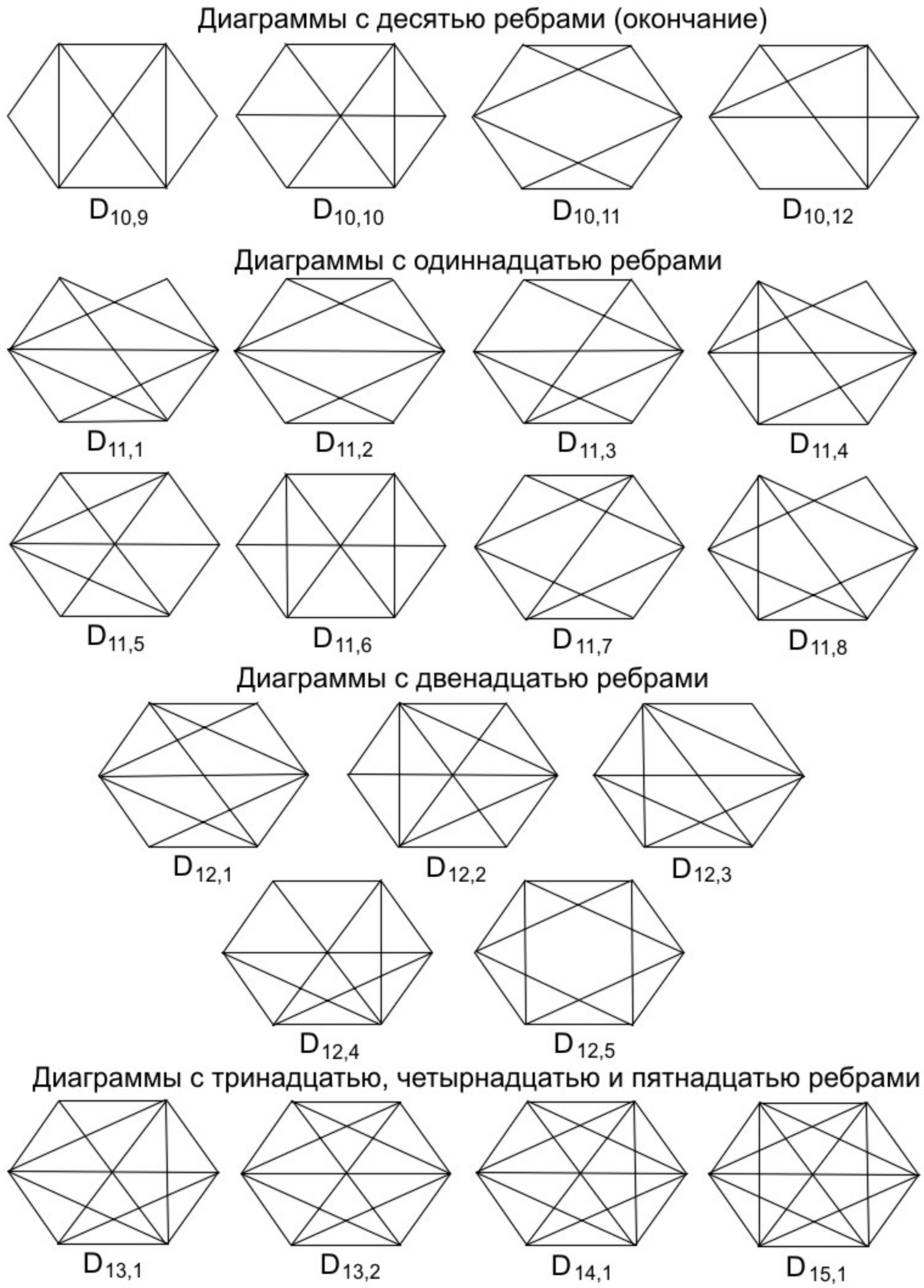

Рис. 4: Основные диаграммы с шестью вершинами (окончание)

$G_{q,N}$	$G_{6,2}$	$G_{7,1}$	$G_{7,2}$	$G_{7,3}$	$G_{7,4}$	$G_{7,5}$	$G_{8,1}$	$G_{8,2}$	$G_{8,3}$
$m_{q,N}$	3	5	5	1	1	3	1	7	5
$G_{q,N}$	$G_{8,4}$	$G_{8,5}$	$G_{8,6}$	$G_{8,7}$	$G_{8,8}$	$G_{8,9}$	$G_{8,10}$	$G_{8,11}$	$G_{9,1}$
$m_{q,N}$	9	1	5	3	1	5	1	9	1
$G_{q,N}$	$G_{9,2}$	$G_{9,3}$	$G_{9,4}$	$G_{9,5}$	$G_{9,6}$	$G_{9,7}$	$G_{9,8}$	$G_{9,9}$	$G_{9,10}$
$m_{q,N}$	5	1	3	13	13	11	9	7	5
$G_{q,N}$	$G_{9,11}$	$G_{9,12}$	$G_{9,13}$	$G_{9,14}$	$G_{9,15}$	$G_{10,1}$	$G_{10,2}$	$G_{10,3}$	$G_{10,4}$
$m_{q,N}$	9	25	5	1	9	5	21	9	11
$G_{q,N}$	$G_{10,5}$	$G_{10,6}$	$G_{10,7}$	$G_{10,8}$	$G_{10,9}$	$G_{10,10}$	$G_{10,11}$	$G_{10,12}$	$G_{11,1}$
$m_{q,N}$	1	21	17	15	11	25	17	9	9
$G_{q,N}$	$G_{11,2}$	$G_{11,3}$	$G_{11,4}$	$G_{11,5}$	$G_{11,6}$	$G_{11,7}$	$G_{11,8}$	$G_{12,1}$	$G_{12,2}$
$m_{q,N}$	17	29	19	25	41	33	25	41	25
$G_{q,N}$	$G_{12,3}$	$G_{12,4}$	$G_{12,5}$	$G_{13,1}$	$G_{13,2}$	$G_{14,1}$	$G_{15,1}$		
$m_{q,N}$	28	57	65	74	97	148	260		

Теорема А. *3. Пусть G - граф. Если основной подграф графа G линейно гомеоморфен графу $G_{q,N}$ для некоторых чисел q и N, то $\nu(G) \geqslant m_{q,N}$.*

В диссертации на стр. 118-128 (то есть в Приложении) для каждой пары чисел q и N изображены или описаны образы $m_{q,N}$ линейных вложений $G_{q,N} \to \mathbb{R}^3$, не являющихся попарно жестко изотопными.

2. Результаты, относящиеся к произвольным графам

Перечислим сначала результаты работы, относящиеся к *кусочно-линейно* изотопической классификации линейных вложений графов в $\mathbb{R}^3$.

Пусть G - граф. Линейные вложения $f, g : G \to \mathbb{R}^3$ называются кусочно-линейно *изотопными*, если существует кусочно-линейный гомеоморфизм $\Phi : \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R}^3 \times I$, такой что $\Phi(\mathbb{R}^3 \times t) \subset \mathbb{R}^3 \times t$ для любого $t \in I$, $\Phi_0 = id$ и $\Phi_1(f(x)) = g(x)$ для любого $x \in G$. Через $\lambda(G)$ мы будем обозначать число классов изотопных линейных вложений графа G в $\mathbb{R}^3$. Заметим, что, поскольку из линейной изотопии следует кусочно-линейная, $\lambda(G) \leqslant \nu(G)$.

Пусть G_0 - связный граф (возможно, пустой) и пусть $G_1, G_2 \dots, G_k$ - графы, содержащие граф G_0 в качестве подграфа. Если $G_i \cap G_j = G_0$ при

$1 \leqslant i < j \leqslant k$, то объединение графов $G_1, G_2 \ldots, G_k$ мы будем обозначать через $G_1 \vee_{G_0} G_2 \vee_{G_0} \ldots \vee_{G_0} G_k$.

Лемма 2. *1. Если G_1 - подграф графа G_2, то $\lambda(G_1) \leqslant \lambda(G_2)$.*

2. Пусть G_0 - связный граф, содержащий не более двух ребер, и пусть $G_1, G_2 \ldots, G_k$ - графы, такие что $G_i \cap G_j = G_0$ при $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Тогда $\lambda(G_1 \vee_{G_0} G_2 \vee_{G_0} \ldots \vee_{G_0} G_k) \geqslant \prod_{i=1}^{k} \lambda(G_i)$. Если, сверх того, граф G_0 пуст и каждый граф G_i содержит нестягиваемую компоненту (т.е. основной подграф графа G_i не пуст), то $\lambda(G_1 \vee_{G_0} G_2 \vee_{G_0} \ldots \vee_{G_0} G_k) \geqslant 3^{k-1} \prod_{i=1}^{k} \lambda(G_i)$.

3. Пусть $G_1, G_2 \ldots, G_k$ - графы, такие что $G_i \cap G_{i+1}$ есть либо вершина, либо ребро каждого из графов G_i и G_{i+1} (при $1 \leqslant i < k$). Если $G_i \cap G_j = \oslash$ при $j - i > 1$, то $\lambda(G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k) \geqslant \prod_{i=1}^{k} \lambda(G_i)$.

Для любых натуральных чисел m и k обозначим через $C_{m,k}$ число C_m^k, если $m \geqslant k$, и нуль, если $m < k$.

Лемма 3. *Для любого графа G с n вершинами имеет место неравенство*

$$\lambda(G) \leqslant 2 \cdot 6^{3n} \sum_{k=0}^{3n} 2^k \cdot C_{C_n^4,k}.$$

Пусть $k, m_1, m_2, \ldots, m_k$ - натуральные числа; обозначим через $G(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ какой-нибудь граф, линейно гомеоморфный набору k непересекающихся циклов с $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ребрами. Положим $\lambda(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \lambda(G(m_1, m_2, \ldots, m_k))$. Далее, для любого натурального числа m обозначим через $\tilde{\lambda}(m)$ число классов изотопных линейных вложений $G(m) \to \mathbb{R}^3$, являющихся простыми узлами; ясно, что $\tilde{\lambda}(m) \leqslant \lambda(m)$. Наконец, для любых натуральных чисел i и j обозначим через $d_{i,j}$ число j-членных последовательностей целых чисел $(r_1, r_2, \ldots, r_j)$, таких что $|r_1| + |r_2| + \ldots + |r_j| = i$.

Лемма 4. *1. Если $k = 1$, то $\lambda(m) = 1$ для $3 \leqslant m \leqslant 5$;*

$$\tilde{\lambda}(m) \geqslant \begin{cases} \frac{1}{3}(2^{m-4} + 2^{\frac{m-2}{2}}) & \text{при } m \equiv 0 \pmod 4, \\ \frac{1}{3}(2^{m-4} + 2^{\frac{m-3}{2}} - 1) & \text{при } m \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{1}{3}(2^{m-4} + 2^{\frac{m-2}{2}} + 1) & \text{при } m \equiv 2 \pmod 4, \\ \frac{1}{3}(2^{m-4} + 2^{\frac{m-3}{2}}) & \text{при } m \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

в остальных случаях.

2. Если $k = 2$, то

$$\lambda(m_1, m_2) \geqslant \max\{3\lambda(m_1)\lambda(m_2) + 2\lambda(m_1) \sum_{i=2}^{\left[\frac{m_2-2}{2}\right]} \lambda(m_2 - 2i + 1),$$

$$3\lambda(m_1)\lambda(m_2) + 2 \sum_{i=2}^{\min\{m_1-2, m_2-3\}} \lambda(m_1 - i + 1)\lambda(m_2 - i)\}.$$

3. Если $k \geqslant 3$, то

$$\lambda(m_1, \ldots, m_k) \geqslant \lambda(m_1, \ldots, m_{k-1}) \cdot$$

$$\cdot \left((2k-1)\lambda(m_k) + \sum_{i=2}^{\left[\frac{m_k-2}{2}\right]} d_{i,k-1}\lambda(m_k - 2i + 1) \right).$$

Заметим, что для конкретных графов эта лемма допускает усиление. Например, пусть G_k - граф, линейно гомеоморфный набору k непересекающихся циклов, каждый цикл состоит из трех ребер. Тогда: *если* $k = 1$, *то* $\lambda(G_k) = 1$; *если* $k = 2$, *то* $\lambda(G_k) = 3$; *если* $k = 3$, *то* $\lambda(G_k) \geqslant 29$; *если* $k = 4$, *то* $\lambda(G_k) \geqslant 1017$; *если* $k \geqslant 5$, *то* $\lambda(G_k) \geqslant \frac{339 \cdot (2k-1)!!}{35} + \sum_{i=5}^{k} \frac{(2k-1)!!}{(2i-1)!!} 2^i$. (Согласно лемме 4, имеем $\lambda(G_k) \geqslant (2k-1)!!$ для любого натурального числа k.)

Пусть k - натуральное число и G' - граф, который может быть получен из последовательности k циклов отождествлением для каждого натурального числа $i < k$ циклов с номерами i и $i+1$ вдоль простых путей. Обозначим через l_i число ребер путей, по которым отождествляются циклы с номерами

i и $i+1$, и через m_i число ребер i-ого цикла. Положим $n_1 = m_1 - l_1, n_2 = m_2 - l_1 - l_2, \ldots, n_i = m_i - l_{i-1} - l_i, \ldots, n_{k-1} = m_{k-1} - l_{k-2} - l_{k-1}, n_k = m_k - l_{k-1}$.

Лемма 5.

$$\lambda(G^{'}) \geqslant \tilde{\lambda}(\sum_{i=1}^{k} n_i) + \sum_{p=2}^{k} (\tilde{\lambda}(n_1 + n_2 + \ldots + n_{\left[\frac{k}{p}\right]} + 1) - 1) \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=2}^{p-1} \left(\tilde{\lambda}(n_{\left[\frac{(i-1)k}{p}\right]+1} + \ldots + n_{\left[\frac{ik}{p}\right]} + 2) - 1 \right) \cdot \left(\tilde{\lambda}(n_{\left[\frac{(p-1)k}{p}\right]+1} + \ldots + n_k + 1) - 1 \right).$$

Перечислим теперь результаты работы, относящиеся к *жестко* изотопической классификации линейных вложений графов в пространство $\mathbb{R}^3$.

Теорема B. *Для любого графа G с n вершинами имеет место неравенство*

$$\nu(G) \leqslant 2 \cdot 6^{3n} \sum_{k=0}^{3n} 2^k \cdot C_{C_n^4, k}.$$

Леммы 2, 4, 5 остаются верными, если в них символ λ заменить символом ν. Далее, следующая теорема следует из лемм 2, 4, 5 и неравенства $\lambda(G) \leqslant \nu(G)$.

Пусть $k, m_1, m_2, \ldots, m_k$ - натуральные числа; мы полагаем
$\nu(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \nu(G(m_1, m_2, \ldots, m_k))$.

Теорема C. *1. Если $k = 2$, то*

$$\nu(m_1, m_2) \geqslant \max\{\frac{1}{3} \cdot 2^{m_1+m_2-8} + 2^{m_1-3}(2^{m_2-5} + (-1)^{k+1})/27,$$
$$\frac{1}{3} \cdot 2^{m_1+m_2-8} + \frac{2}{9} \sum_{i=2}^{\min\{m_1-2, m_2-3\}} 2^{m_1-i-3} 2^{m_2-i-4}\};$$

если $k > 2$, то

$$\nu(m_1, \ldots, m_k) \geqslant \nu(m_1, \ldots, m_{k-1}) \cdot \left(\frac{2k-1}{3} \cdot 2^{m_k-4} + \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{\left[\frac{m_k-2}{2}\right]} d_{i,k-1} 2^{m_k-2i-3} \right).$$

2. *Пусть граф G содержит подграф, линейно гомеоморфный букету k циклов с $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ребрами соответственно. Тогда*

$$\nu(G) \geqslant 2^{\sum_{i=1}^{k} m_i - 4k}/3^k$$

3. *Пусть граф G' - тот же, что и в лемме 5. Тогда*

$$\nu(G) \geqslant \frac{1}{3} \cdot 2^{\sum_{i=1}^{k} n_i - 4} + \sum_{p=2}^{k} \frac{1}{3^p}(2^{n_1 + \ldots + n_{\left[\frac{k}{p}\right]} - 3} - 1) \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=2}^{p-1} (2^{n_{\left[\frac{(i-1)k}{p}\right]+1} + \ldots + n_{\left[\frac{ik}{p}\right]} - 2} - 1) \cdot (2^{n_{\left[\frac{(p-1)k}{p}\right]+1} + \ldots + n_k - 3} - 1)$$

3. Зацепления выпуклых плоских кривых

Замкнутой кривой называется гладкое компактное связное одномерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^3$. Замкнутая кривая называется *плоской*, если она содержится в какой-нибудь плоскости пространства $\mathbb{R}^3$. Плоская замкнутая кривая называется *выпуклой*, если в плоскости, в которой она содержится, она ограничивает выпуклое множество.

Назовем *cp-зацеплением с n компонентами* любую n-членную последовательность попарно непересекающихся выпуклых плоских замкнутых кривых в $\mathbb{R}^3$. Назовем *cp*-зацепления $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ и $(L'_1, L'_2, \ldots, L'_n)$ *cp-изотопными*, если существует гладкая изотопия $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ с $t \in I$, такая что $h_0 = id$, что $h_1(L_i) = L'_i$ (с $1 \leqslant i \leqslant n$) и что для любого $t \in I$ и для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ кривая $h_t(L_i)$ содержится в некоторой плоскости и ограничивает в ней выпуклое множество.

Пусть $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ - *cp*-зацепление. Для натуральных чисел $i \neq j$, не превосходящих числа n, выберем какие-нибудь ориентации подмногообразий L_i и L_j пространства $\mathbb{R}^3$ и обозначим через $\tilde{\mu}(ij)(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ модуль их коэффициента зацепления. Нетрудно проверить, что *число* $\tilde{\mu}(ij)(L_1, L_2, \ldots, L_n)$

не зависит от выбора ориентаций подмногообразий L_i и L_j, является ср-изотопическим инвариантом и может принимать только значения 0 и 1. Для попарно различных натуральных чисел i, j, k, каждое из которых не превосходит числа n, выберем какие-нибудь ориентации компонент L_i, L_j и L_k и определим два числа $\xi(ijk)(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ и $\tilde{\mu}(ijk)(L_1, L_2, \ldots, L_n)$. Первое число - это произведение коэффициентов зацепления i-ой и j-ой, i-ой и k-ой, j-ой и k-ой компонент зацепления. Второе число зададим правилом: если $\tilde{\mu}(ij)(L_1, L_2, \ldots, L_n) = \tilde{\mu}(ik)(L_1, L_2, \ldots, L_n) = \tilde{\mu}(jk)(L_1, L_2, \ldots, L_n) = 0$, то $\tilde{\mu}(ijk)(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ есть абсолютная величина числа Милнора $\mu(ijk)$ зацепления (L_i, L_j, L_k); если хотя бы одно из чисел $\tilde{\mu}(ij)(L_1, L_2, \ldots, L_n)$, $\tilde{\mu}(ik)(L_1, L_2, \ldots, L_n)$, $\tilde{\mu}(jk)(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ отлично от нуля, то мы полагаем $\tilde{\mu}(ijk)(L_1, L_2, \ldots, L_n) = 0$. Нетрудно проверить, что наши *определения не зависят от выбора ориентаций компонент зацепления, числа $\xi(ijk)(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ и $\tilde{\mu}(ijk)(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ являются ср-изотопическими инвариантами и принимают значения 0, ± 1 и 0, 1 соответственно.*

Теорема. *1. Пусть (L_1, L_2) и (L'_1, L'_2) - ср-зацепления. Они ср-изотопны тогда и только тогда, когда $\tilde{\mu}(12)(L_1, L_2) = \tilde{\mu}(12)(L'_1, L'_2)$.*

2. Пусть (L_1, L_2, L_3) и (L'_1, L'_2, L'_3) - ср-зацепления, такие что $\tilde{\mu}(123)(L_1, L_2, L_3) = \tilde{\mu}(123)(L'_1, L'_2, L'_3) = 0$. Они ср-изотопны тогда и только тогда, когда $\tilde{\mu}(ij)(L_1, L_2, L_3) = \tilde{\mu}(ij)(L'_1, L'_2, L'_3)$ при $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ и $\xi(123)(L_1, L_2, L_3) = \xi(123)(L'_1, L'_2, L'_3)$. Любое ср-зацепление (L_1, L_2, L_3) с $\tilde{\mu}(123) \neq 0$ ср-изотопно кольцу Борромео (с какой-то нумерацией компонент).

3. Пусть (L_1, L_2, L_3, L_4) - ср-зацепление. Оно ср-изотопно тривиальному тогда и только тогда, когда $\tilde{\mu}(ij)(L_1, L_2, L_3, L_4) = 0$ при $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ и $\tilde{\mu}(ijk)(L_1, L_2, L_3, L_4) = 0$ при $1 \leqslant i < j < k \leqslant 4$.

Следствие. *Пусть* (L_1, L_2, L_3, L_4) *- ориентированное (классическое) зацепление. Если оно изотопно какому-нибудь ср-зацеплению, то* $\bar{\mu}(1234)(L_1, L_2, L_3, L_4) = 0$*, где* $\bar{\mu}(1234)$ *- один из серии* $\bar{\mu}$*-инвариантов, определенных Милнором.*

Работы автора по теме диссертации

1. Е.Н.Глушак, *Линейные вложения полных графов в трехмерное евклидово пространство,* Сборник аннотаций работ по грантам Санкт-Петербургского конкурса 2003 г. для студентов, аспирантов и молодых специалистов, 2003 г., с.20.

2. Е.Н.Глушак, *Линейные вложения полных графов с пятью вершинами,* Материалы Всерос. науч.-метод. конф., Вел. Новгород, 2004 г., с.31-34.

3. Е.Н.Глушак, *Оценки числа классов жестко изотопных полигональных узлов,* Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова, Абрау-Дюрсо, 2006 г., с.24-25.

4. Е.Н.Глушак, *Зацепления выпуклых плоских узлов,* Тезисы докладов 7-й междунар. конф. по геометрии и топологии, Черкассы, 2007 г., с.12-13.

5. Е.Н.Глушак, *Линейные вложения простых графов в* $\mathbb{R}^3$*,* Зап. научн. сем. ПОМИ **353** (2008), 27–34 .

6. Е.Н.Глушак, *Линейные вложения графов с шестью вершинами,* Успехи математических наук **63**:4(382) (2008), 177–178.

7. E.Glushak, *Linear embeddings of graphs with six vertices in* $\mathbb{R}^3$*,* Дифференциальные уравнения и топология: Междунар. конф., посв. 100-летию со дня рожд. Л.С.Понтрягина: Тезисы докладов, Москва, 2008 г., с. 437.