

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

АЛМАЗОВА СВЕТЛАНА ВИКТОРОВНА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И
ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ УПРУГИХ ТЕЛ

01.02.01. – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2008

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
ЮШКОВ Михаил Петрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
МЕЛЬНИКОВ Геннадий Иванович

кандидат физико-математических наук, доцент
ЕРШОВА Зинаида Георгиевна

Ведущая организация: Балтийский государственный технический университет
(«Военмех»), г. Санкт-Петербург

Защита состоится «22» мая 2008 г. в 14 часов на заседании совета Д.212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский проспект, 28, математико-механический факультет Санкт-Петербургского государственного университета.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М.Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9.

Автореферат разослан « ____ » _____ 200__ г

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор

С.А. Зегжда

1. Общая характеристика работы.

Актуальность темы диссертационной работы

Уравнения движения системы упругих тел, особенно при наличии большого количества тел, являются настолько сложными, что оказывается достаточно затруднительно не только их проинтегрировать, но даже записать. Существуют точные методы решения подобных задач, но во многих случаях их не удается применить, например, в большинстве случаев, когда в задаче Штурма-Лиувилля коэффициенты являются переменными. Поэтому актуальным является вопрос о том, как в виде, удобном для использования компьютера, представить уравнения движения системы упругих тел. Вот почему особое внимание уделяется приближенным методам (методы Релея, Ритца, Бубнова-Галеркина, метод конечных элементов, метод конечных разностей (метод сеток) и т.д.). В данной работе рассматриваются новый приближенный метод определения собственных частот и собственных форм колебаний системы упругих тел через собственные частоты и формы ее элементов и новый приближенный метод, основанный на рассмотрении реакций связей как обобщенных лагранжевых координат, использующие аппарат голономной механики. Для краткости изложения в дальнейшем будем называть первый из них **методом сочленения элементов с учетом квазистатики**, а второй – **методом сил**. Применение этих методов позволяет не только получать приближенные значения низших частот и собственных функций системы упругих тел, что имеет самостоятельное значение, но и использовать их результаты для тестирования громоздких современных программ, создаваемых для расчета сложных механических систем. Поэтому исследование и развитие этих методов является актуальным.

Цель диссертационной работы

Нахождение собственных частот и построение собственных форм колебаний систем упругих тел новыми приближенными методами, разрабатываемыми на кафедре теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, сравнение с результатами, полученными другими известными методами, в том числе с помощью пакетов прикладных программ. Для достижения данной цели в ходе выполнения работы необходимо было решить следующие задачи:

1. с помощью численного эксперимента показать сходимости и определить точность метода сочленения элементов с учетом квазистатики на примере задачи о колебаниях упругих систем с распределенными параметрами:

- весоного двухопорного вала с диском на консоли;
- системы 3-х стержней, 2 из которых совершают изгибные колебания, а один – продольные;

2. установить связь метода сочленения элементов с учетом квазистатики и метода сил, рассматривающего реакции связей как обобщенные лагранжевы координаты;

3. исследовать точность метода сил на примере задачи о колебаниях системы 3-х стержней.

Методы исследования

В данной работе используются новый приближенный метод определения собственных частот и собственных форм колебаний системы упругих тел через собственные частоты и собственные формы ее элементов и новый приближенный метод определения первой собственной частоты упругой системы, основанный на рассмотрении реакций связей как обобщенных лагранжевых координат. Полученные результаты сравниваются с результатами, полученными методом Релея-Ритца, методом конечных элементов (с помощью пакета прикладных программ ANSYS 8.1), методом разделения переменных.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Два новых приближенных метода определения низших собственных частот и собственных функций колебаний применяются к сложным механическим системам, представленным в виде связанных между собой упругих тел. Указанными методами исследованы колебания несомкнутого двухопорного вала с диском на консоли и одной трехстержневой системы.

2. Для выяснения точности метода сочленения элементов с учетом квазистатики использовано точное решение колебаний несомкнутого двухопорного вала с диском на консоли, а также расчеты, проведенные с помощью пакета ANSYS 8.1 для системы 2-х стержней.

3. Метод сочленения элементов с учетом квазистатики был использован в качестве точного, наряду с МКЭ (ANSYS 8.1), для сравнения с результатами, полученными методом сил для задачи о колебаниях системы 3-х стержней.

Научная и практическая ценность

Дается некоторое развитие метода сочленения элементов с учетом квазистатики в виде метода сил и исследуется точность методов. В качестве практического приложения результаты работы могут быть использованы для расчета реальных механических систем, обладающих свойствами исследуемых моделей. Определитель частот конечного порядка, квазистатический учет высших форм колебаний, введение кривой статического прогиба в выражение для собственных форм колебаний упругой механической системы, рассмотрение реакций связей как обобщенных лагранжевых координат позволяют

значительно упростить и ускорить эти расчеты и получить компактные формулы, удобные для качественного исследования колебаний сложных механических систем. Помимо этого, приближенные результаты, легко получаемые этими методами, позволяют оценивать достоверность современных сложных компьютерных программ, создаваемых для расчета на колебания различных технических конструкций, состоящих из системы взаимосвязанных упругих тел.

Результаты, выносимые на защиту

1. Получено представление кинетической и потенциальной энергий системы упругих тел в виде канонических квадратичных форм от избыточных координат системы и их производных по времени.
2. Численным экспериментом показана сходимость и определена точность метода сочленения элементов с учетом квазистатики на примере решения 2-х задач о колебаниях систем упругих тел:
 - весоного двухопорного вала с диском на консоли;
 - системы 3-х стержней, 2 из которых совершают изгибные колебания, а один – продольные.
3. Установлена связь метода сил, рассматривающего реакции связей как обобщенные лагранжевы координаты, с методом сочленения элементов с учетом квазистатики. Показано, что метод сил дает высокую точность за счет учета всех собственных форм колебаний элементов системы не только в потенциальной, но и в кинетической энергиях.
4. Разработана методика применения метода сил к механической системе, состоящей из трех стержней.
5. Анализ сравнения приближенных результатов с точными позволяет сделать вывод о том, что развиваемые два метода с высокой точностью описывают колебания систем упругих тел с распределенными параметрами.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математической постановки задачи, сопоставлением авторских решений с результатами, полученными известными, экспериментально подтвержденными методами. Решения, полученные для заявленных моделей упругих систем с распределенными параметрами, их анализ и сравнение с результатами применения общепринятых приближенных методов позволили сделать вывод о том, что развиваемые подходы адекватно описывают колебания систем упругих тел.

Апробация результатов

Основные положения и результаты, включенные в диссертацию, докладывались на семинарах кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета (Санкт-Петербург, 2004 - 2007), на Международных конференциях «Четвертые» и «Пятое Окуневские чтения» (Санкт-Петербург, 2004, 2006), на «Пятом Международном Симпозиуме по классической и небесной механике» (Москва-Великие Луки, 2004), на Международной научной конференции по механике «Четвертые Поляховские Чтения» (Санкт-Петербург, 2006).

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 6 научных работ. Работа [1] опубликована в журнале, рекомендованном ВАК (Перечень. Бюллетень ВАК, 2007, №1, с.3-39).

В работах [5,6] автору диссертации принадлежат результаты применения метода сочленения элементов с учетом квазистатики к исследованию колебаний вращающегося вала с диском на консоли и нелинейных колебаний стержня с несмещаемыми опорами, соавторам, М.П.Юшкову – постановка задач, в работе [5] Д.Шевалье принадлежит выбор механической модели для исследования.

Объем и структура работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка основной литературы. Содержание работы изложено на 97 листах машинописного текста, включает 13 рисунков, 5 таблиц, 6 графиков, список основной литературы содержит 64 наименования.

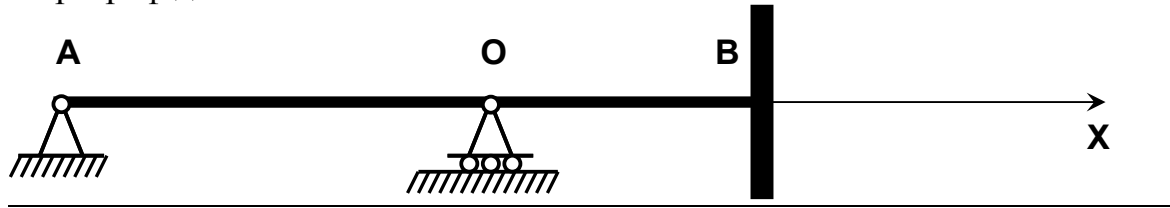
2. Содержание диссертации

Во введении проводится обзор литературы, посвященной изучению колебаний упругих систем и методов их исследований, обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, определяются цели и задачи работы, указаны методы исследования, обсуждаются научная новизна и практическая значимость данных исследований.

Глава 1 посвящена изложению общих положений приближенного подхода в определении собственных частот и собственных форм колебаний системы упругих тел через собственные частоты и собственные функции элементов этой системы. Существенно, что в рассматриваемом методе соединения тел друг с другом трактуются как голономные связи, кинетическая и потенциальная энергии представлены в простейших квадратичных формах и используются уравнения Лагранжа второго рода с множителями для построения системы

уравнений, отражающей колебания механической системы. Излагаемый метод может быть применен к любой системе соединенных между собой упругих тел с распределенными параметрами. Для полноты изложения метода в работе расширяется понятие обобщенных лагранжевых координат упругого тела.

Чтобы продемонстрировать применение изложенного метода для исследования поперечных колебаний вращающегося двухопорного вала с диском на консоли (см. рис. 1) надо знать собственные частоты ω_i и собственные функции X_i колебаний вращающегося вала с консолью без диска. Помимо этого, для сравнения приближенных значений с истинными точно решалась задача и о колебаниях вращающегося вала с диском на консоли. Решению этих задач посвящен второй параграф данной главы.



$AO = L, OB = L_3, m_B$ — масса вала, m_d — масса диска, R — радиус инерции диска.

Рис. 1

Решая методом сочленения элементов с учетом квазистатики задачу о поперечных колебаниях вращающегося двухопорного вала с диском на консоли в первом приближении, вводя коэффициенты влияния, найденные методами сопромата, переходя к безразмерным параметрам, получаем уравнение частот колебаний в виде определителя конечного порядка:

$$\det \alpha = \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21} = 0,$$

где

$$\tilde{a}_{11} = \frac{-1}{m\tilde{p}^2} + \frac{X_1^2(n)}{\tilde{M}_1(\Omega_1^4 - \tilde{p}^2)} + \tilde{\gamma}_{11}(0) - \frac{X_1^2(n)}{\tilde{M}_1\Omega_1^4}, \quad \tilde{a}_{12} = \frac{X_1(n)D_1(n)}{\tilde{M}_1(\Omega_1^4 - \tilde{p}^2)} + \tilde{\gamma}_{12}(0) - \frac{X_1(n)D_1(n)}{\tilde{M}_1\Omega_1^4},$$

$$\tilde{a}_{21} = \frac{X_1(n)D_1(n)}{\tilde{M}_1(\Omega_1^4 - \tilde{p}^2)} + \tilde{\gamma}_{21}(0) - \frac{X_1(n)D_1(n)}{\tilde{M}_1\Omega_1^4}, \quad \tilde{a}_{22} = \frac{-1}{m\mu\tilde{p}^2} + \frac{D_1^2(n)}{\tilde{M}_1(\Omega_1^4 - \tilde{p}^2)} + \tilde{\gamma}_{22}(0) - \frac{D_1^2(n)}{\tilde{M}_1\Omega_1^4},$$

$$n = L_3/L, \quad \frac{m_d}{m_B} = m, \quad \frac{x}{L} = x, \quad \mu = \frac{R^2}{L^2}, \quad \tilde{M}_1 = \frac{M_1}{m_B},$$

$$\tilde{p}^2 = \frac{p^2}{c^2} \cdot L^4 - \text{искомая безразмерная частота,}$$

$$\Omega_1^4 = \frac{\omega_1^2}{c^2} \cdot L^4 - \text{безразмерная частота колебаний свободной консоли.}$$

Порядок определителя равен числу голономных связей. Элементы определителя представляются бесконечными рядами, к которым применяется приближенный способ динамического учета первых членов ряда и квазистатического учета всех остальных (именно этот прием и приводит к сокращенному названию исследуемого метода).

Введение кривой статического прогиба $X_p^{нб}(x)$ вала под действием обобщенных реакций $\tilde{\Lambda}_{p,j}$, полученной методами сопротивления материалов, позволяет увеличить скорость сходимости рядов и приводит к следующему выражению для собственных форм колебаний весомого двухопорного вала с диском на консоли:

$$X_{*1}(x) = \frac{\tilde{\Lambda}_{11} \cdot X_1(n) + \tilde{\Lambda}_{12} \cdot X_1'(n)}{\tilde{M}_1 \Omega_1^4 (\Omega_1^4 - \tilde{p}^2)} \tilde{p}^2 X_1(x) + \tilde{X}_{кр}^{ст}(x), \text{ где}$$

$$\tilde{X}_{кр}^{ст}(x) = \frac{x(1+n)(x^2 + 3x + 2)}{6} \Lambda_{11}n + \Lambda_{12} \cdot \quad -1 \leq x \leq 0$$

$$\tilde{X}_{кр}^{ст}(x) = \frac{-x(1+n)}{6} \Lambda_{11}(x^2 - 3nx - 2n) - \Lambda_{12}(3x + 2) \cdot \quad 0 \leq x \leq n$$

На рис.2 представлены две собственные функции колебаний двухопорного вала с диском на консоли: $GT(x)$ – для точного решения и $GP(x)$ – для приближенного решения. Для нормирования 1-й и 2-й собственных форм выбраны их единичные отклонения в точках максимального прогиба вала.

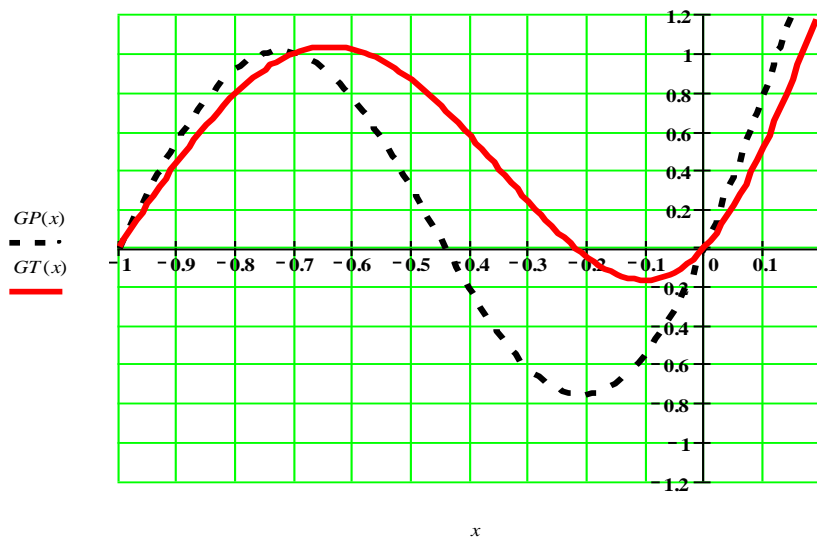
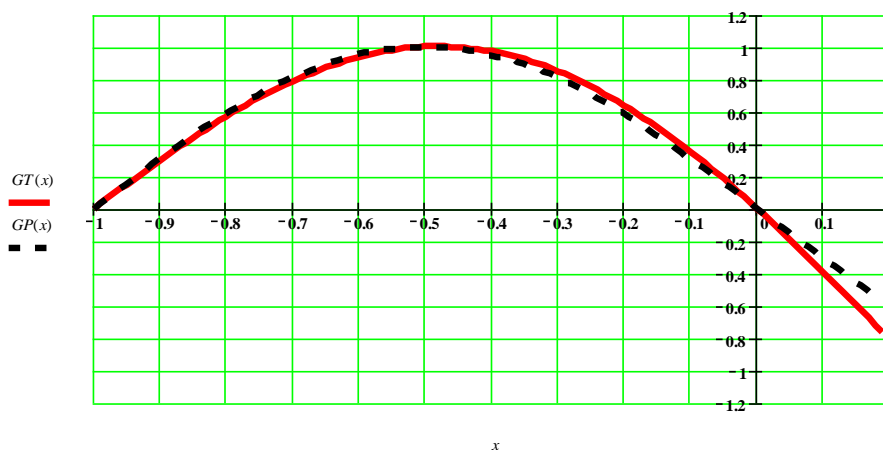


Рис.2

Численные расчеты были проведены в широком диапазоне изменения безразмерных параметров рассматриваемой системы и привели к результатам, полученным в 1-м приближении для 1-й собственной частоты, отличающимся от точного решения менее, чем на один процент. Полученные результаты сравнивались с методом Ритца, в котором за базисные функции принимались собственные функции двухопорного вала с консолью без диска. Сравнение результатов приведено в таблицах 1 и 2.

Согласно этим таблицам можно сделать вывод о высокой точности изучаемого метода. Отметим, что приведенные выше формулы показывают, что для двухопорного несомкнутого вала с диском на консоли получены компактные формулы для определения низших частот колебаний и первых собственных функций. Это позволяет легко проводить качественный анализ колебаний изучаемой механической системы.

$$n = L_3/L, \quad m = m_d/m_b, \quad \mu = \frac{R^2}{L^2} = 0,01$$

Таблица 1

n=0.1	1-я частота колебаний (безразмерная)				
	Точное решение (свобод. консоль)	Точное решение (вал с массой)	Точное решение (вал с диском)	Приближенное решение (вал с диском)	
				С учетом квазистатики	Погрешность
0.1	3.136	3.119	3.102	3.101	0.03 %
0.2	3.136	3.102	3.067	3.066	0.03 %
0.3	3.136	3.085	3.031	3.030	0.03 %
0.4	3.136	3.067	2.996	2.995	0.03 %
0.5	3.136	3.050	2.960	2.960	0.00 %
n=0.3	1-я частота колебаний (безразмерная)				
	Точное решение (свобод. консоль)	Точное решение (вал с массой)	Точное решение (вал с диском)	Приближенное решение (вал с диском)	
				С учетом квазистатики	Погрешность
0.1	2.996	2.807	2.785	2.770	0.53 %
0.2	2.996	2.645	2.608	2.591	0.65 %
0.3	2.996	2.513	2.468	2.453	0.60 %
0.4	2.996	2.405	2.356	2.344	0.50 %
0.5	2.996	2.316	2.264	2.254	0.44 %

$$n=0.2, \quad \Omega_1 = 3.1, \quad \Omega_2 = 5.854, \quad \mu = \frac{R^2}{L^2} = 10^{-4}$$

Таблица 2

m	Точные значения 1-й частоты (вал с диском)	Метод Рунге		Приближенный метод	
		Приближенные значения 1-й частоты (вал с диском)	Относительная погрешность	Приближенные значения 1-й частоты (вал с диском)	Относительная погрешность
0.1	3.022	3.106	2.7 %	3.020	0.06 %
0.2	2.944	3.070	4.0 %	2.940	0.14 %
0.3	2.869	3.036	5.8 %	2.865	0.14 %
0.4	2.798	3.005	7.3 %	2.795	0.11 %
0.5	2.732	2.976	8.9 %	2.730	0.07 %
0.6	2.672	2.948	10.2 %	2.669	0.11 %
0.7	2.616	2.923	11.6 %	2.613	0.11 %
0.8	2.564	2.899	13.0 %	2.562	0.08 %
0.9	2.517	2.876	14.0 %	2.515	0.08 %
1.0	2.473	2.854	15.0 %	2.471	0.08 %

Глава 2 является примером применения метода сочленения элементов с учетом квазистатики к другой упругой системе, состоящей из трех однородных прямых стержней и одной линейной податливости (см. рис. 3). Предполагается, что стержни совершают колебания в одной вертикальной плоскости, и при малых колебаниях системы стержень 1 совершает продольные колебания, а стержни 2 и 3 – изгибные.

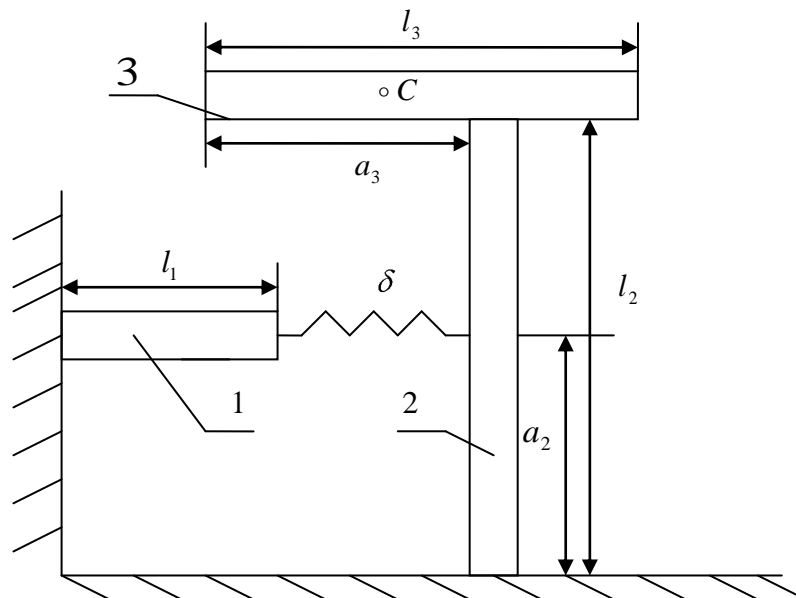


Рис. 3

Теоретической основой исследования данной модели является работа С.А. Зегжды и М.П.Юшкова “A new method of vibration analysis of elastic systems, based on the Lagrange equations of the first kind” Technische Mechanik. 1998. Bd 18. H.2. S.151-158. Ими найдено представление собственных форм колебаний трехстержневой системы по собственным формам ее отдельных элементов. В диссертации была разработана методика определения для трехстержневой системы минимального числа параметров, от которых зависит спектр собственных частот. По этой методике были получены приближенная формула расчета собственных частот и выражение для собственных форм колебаний системы 3-х стержней в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_\rho(x_1) &= \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \tilde{\Lambda}_{\rho 1}^*}{m_{12}(k_{12}\lambda_{1\sigma}^4 - \tilde{p}_\rho^2)} \cdot X_{1\sigma}(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \\ \tilde{y}_{\rho 2}(x_2) &= \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{-X_{2\sigma}(a_2) \cdot \tilde{\Lambda}_{\rho 1}^* + X_{2\sigma}(l_2) \cdot \tilde{\Lambda}_{\rho 2}^* + X'_{x_1, 2\sigma}(1) \cdot \tilde{\Lambda}_{\rho 4}^*}{A_{2\sigma}^2(\lambda_{2\sigma}^4 - \tilde{p}_\rho^2)} \cdot X_{2\sigma}(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \\ \tilde{y}_{\rho 3}(x_3) &= \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{X_{3\sigma}(a_3) \cdot \tilde{\Lambda}_{\rho 3}^* + l \cdot X'_{z, 3\sigma}(z) \cdot \tilde{\Lambda}_{\rho 4}^*}{m_{32}A_{3\sigma}^2(k_{32}\lambda_{3\sigma}^4 - \tilde{p}_\rho^2)} \cdot X_{3\sigma}(x_3), \quad 0 \leq x_3 \leq 1,\end{aligned}$$

Были введены 8 безразмерных параметров:

$$\begin{aligned}\frac{l_2}{l_3} = l, \quad \frac{a_2}{l_2} = \xi, \quad \frac{a_3}{l_3} = z, \quad \frac{\delta}{\delta_*} = \tilde{\delta}, \quad \text{где} \quad \delta_* = \frac{l_2^3}{E_2 \cdot J_2}, \\ k_{12} = \frac{k_1^2}{k_2^2}, \quad k_{32} = \frac{k_3^2}{k_2^2}, \quad m_{12} = \frac{m_1}{m_2}, \quad m_{32} = \frac{m_3}{m_2},\end{aligned}$$

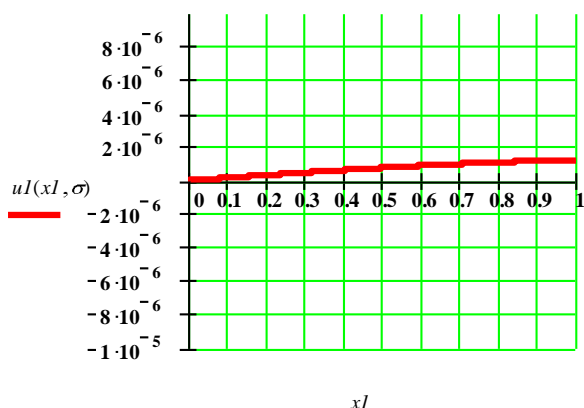
и безразмерная частота $\tilde{p}^2 = \frac{p^2}{k_2^2}$.

В работе приведен пример численного решения задачи для некоторых конкретных параметров трехстержневой системы:

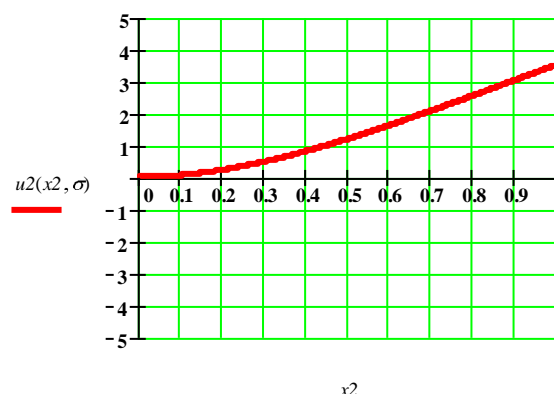
$$\begin{aligned}l = 1, \quad \xi = 1, \quad z = 1, \quad m_{12} = 0.5, \quad m_{22} = 1, \quad m_{32} = 1, \\ k_{12} = 19200, \quad k_{22} = 1, \quad k_{32} = 1, \quad \tilde{\delta} = 72,917.\end{aligned}$$

Собственные формы колебаний представлены следующими графиками:

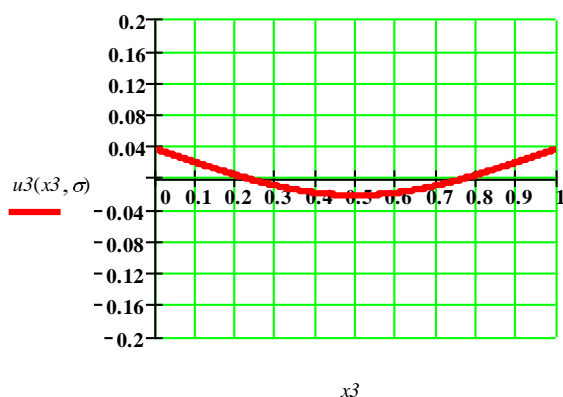
Стержень 1:



Стержень 2:



Стержень 3:



В третьей главе обосновывается идея рассмотрения реакций связей как обобщенных лагранжевых координат в задачах об определении низших частот колебаний систем упругих тел и устанавливается связь метода сил с методом сочленения элементов с учетом квазистатики. Разработана методика применения метода сил в задаче об определении первой собственной частоты трехстержневой системы (см. рис.3).

Все стержни под действием сил реакций $\Lambda_i, i = \overline{1,4}$, деформируются квазистатически. При этом заданием сил Λ_i в момент времени t однозначно определяется поле перемещений всех трёх стержней. Именно это позволяет рассматривать реакции связей как обобщенные лагранжевы координаты. Метод позволяет значительно упростить расчеты.

Для каждого из стержней строится выражение для потенциальной и кинетической энергий с учетом наличия действия сил реакций $\Lambda_1(t), \Lambda_2(t), \Lambda_3(t)$, а также момента $\Lambda_4(t)$.

Расчеты приводят к формулам суммарной потенциальной и кинетической энергий в безразмерном виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 \tilde{\gamma}_{ij}(0) \tilde{\Lambda}_i \tilde{\Lambda}_j, \quad \tilde{\gamma}_{ij}(0) - \text{безразмерные податливости в квазистатике}$$

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} a_{33} \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} a_{44} \dot{q}_4^2 + a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{14} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + a_{24} \dot{q}_2 \dot{q}_4 +$$

$$+ a_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + a_{43} \dot{q}_4 \dot{q}_3, \quad \text{где } \tilde{\Lambda}_i = q_i,$$

а коэффициенты имеют следующий вид:

$$a_{11} = (a_{11})_1 + (a_{11})_2 + (a_{11})_{3,\xi} + (a_{11})_{3,y}, \quad a_{22} = (a_{22})_2 + (a_{22})_{3,\xi} + (a_{22})_{3,y},$$

$$a_{33} = (a_{33})_{3,y}, \quad a_{13} = (a_{13})_{3,y}, \quad a_{44} = (a_{44})_2 + (a_{44})_{3,\xi} + (a_{44})_{3,y},$$

$$a_{12} = (a_{12})_2 + (a_{12})_{3,\xi} + (a_{12})_{3,y}, \quad a_{14} = (a_{14})_2 + (a_{14})_{3,y}, \quad a_{32} = (a_{32})_{3,y},$$

$$a_{24} = (a_{24})_2 + (a_{24})_{3,\xi} + (a_{24})_{3,y}, \quad a_{34} = (a_{34})_{3,y}, \quad \text{где}$$

$$\mathfrak{a}_{11 \cdot 1}^- = \frac{1}{3} \frac{1}{m_{12}} \frac{1}{(k_{12})^2}; \quad \mathfrak{a}_{11 \cdot 2}^- = \frac{1}{9} \mathfrak{I}_{-}^{\bar{6}} \int_0^1 f_1^2(z) dz; \quad \mathfrak{a}_{11 \cdot 3,\xi}^- = \frac{1}{9} m_{32} \mathfrak{I}_{-}^{\bar{6}} f_1^2(1);$$

$$\mathfrak{a}_{11 \cdot 3,y}^- = \frac{m_{32}}{12} \left(\frac{1}{l} \right)^2 \mathfrak{I}_{-}^{\bar{4}}; \quad \mathfrak{a}_{22 \cdot 2}^- = \int_0^1 f_2^2(z) dz; \quad \mathfrak{a}_{22 \cdot 3,\xi}^- = m_{32} f_2^2(1);$$

$$\mathfrak{a}_{22 \cdot 3,y}^- = \frac{m_{32}}{12} \left(\frac{1}{l} \right)^2; \quad \mathfrak{a}_{33 \cdot 3,y}^- = \frac{1}{m_{32} (k_{32})^2} \int_0^1 h_2^2(z) dz; \quad \mathfrak{a}_{44 \cdot 2}^- = \frac{1}{20}; \quad \mathfrak{a}_{44 \cdot 3,\xi}^- = \frac{m_{32}}{4};$$

$$\mathfrak{a}_{44 \cdot 3,y}^- = m_{32} \int_0^1 f_{34}^2(z) dz; \quad \mathfrak{a}_{12 \cdot 2}^- = \frac{1}{3} \mathfrak{I}_{-}^{\bar{3}} \int_0^1 f_1(z) f_2(z) dz; \quad \mathfrak{a}_{12 \cdot 3,\xi}^- = \frac{1}{9} m_{32} \mathfrak{I}_{-}^{\bar{3}} f_1(1);$$

$$\mathfrak{a}_{12 \cdot 3,y}^- = \frac{m_{32}}{12} \left(\frac{\zeta}{l} \right)^2; \quad \mathfrak{a}_{14 \cdot 2}^- = \frac{1}{6} \mathfrak{I}_{-}^{\bar{3}} \int_0^1 f_1(z) f_4(z) dz; \quad \mathfrak{a}_{14 \cdot 3,\xi}^- = \frac{1}{6} m_{32} \mathfrak{I}_{-}^{\bar{3}} f_1(1);$$

$$\mathfrak{a}_{14 \cdot 3,y}^- = m_{32} \frac{1}{2l} \mathfrak{I}_{-}^{\bar{2}} \int_0^1 f_{34}(z) (1-z) dz; \quad \mathfrak{a}_{24 \cdot 2}^- = \frac{1}{2} \int_0^1 f_2(z) f_4(z) dz; \quad \mathfrak{a}_{24 \cdot 3,\xi}^- = \frac{1}{6} m_{32};$$

$$\mathfrak{a}_{24 \cdot 3,y}^- = m_{32} \frac{1}{2l} \int_0^1 f_{34}(z) (1-z) dz;$$

$$\mathfrak{a}_{13 \cdot 3,y}^- = \mathfrak{a}_{31 \cdot 3,y}^- = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l k_{32}} \right) \mathfrak{I}_{-}^{\bar{2}} J, \quad J = \int_0^1 h_2(z) (1-z) dz;$$

$$\mathfrak{a}_{32 \cdot 3,y}^- = \mathfrak{a}_{23 \cdot 3,y}^- = \frac{1}{2k_{32}l} \int_0^1 h_2(z) (1-z)^2 dz; \quad \mathfrak{a}_{34 \cdot 3,y}^- = \frac{1}{k_{32}} \int_0^1 f_{34}(z) h_2(z) dz,$$

$$h_1(z) = \frac{7}{20} - \frac{z}{2} + \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{10}, \quad h_2(z) = \frac{1}{20} - \frac{z}{12} + \frac{z^4}{12} - \frac{z^5}{20}, \quad f_{34}(z) = \frac{l_3}{l_2} (1-z) + \frac{l_2}{l_3} \frac{1}{m_{32} k_{32}} h_1(z),$$

$$f_{12}(z) = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{l_2}{a_2} z - 1 \right), \text{ если } \frac{a_2}{l_2} \leq z \leq 1,$$

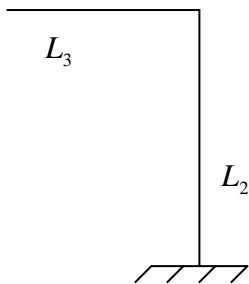
$$f_{12}(z) = \frac{3}{2} \left(\frac{l_2}{a_2} \right)^2 z^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{l_2}{a_2} \right)^3 z^3, \text{ если } 0 \leq z \leq \frac{a_2}{l_2}, \quad f_{22}(z) = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right).$$

Здесь введено безразмерное время: $\tau = k_2 t, \quad k_2^2 = \frac{E_2 \cdot J_2}{\rho_2 \cdot S_2} \cdot \frac{1}{l_2^4}.$

Построение уравнений Лагранжа второго рода с множителями приводит к системе уравнений, отражающей движение рассматриваемой механической системы, и к уравнению частот:

$$\det[d_{ij}(\tilde{p}^2)] = 0.$$

Указанный метод применен и к частному случаю трехстержневой системы – к системе из двух стержней (см. рис. 4). В таблице 3 представлены результаты численных расчетов 1-й частоты колебаний, полученных методом сил, рассмотренным в главе 1 приближенным методом сочленения элементов с учетом квазистатики (по первому приближению) и методом конечных элементов, представленным пакетом прикладных программ ANSYS 8.1. Последний метод выступает в роли точного решения.



$$l := \frac{L_2}{L_3}$$

Рис.4

Таблица 3

№ п/п	l	Значения 1-й частоты (размерные) ANSYS	Значения 1-й частоты с учетом квазистатики			Значения 1-й частоты по методу сил		
			без-размерные	размерные	погрешность	без-размерные	размерные	погрешность
1	10	69.246	2.965	69.362	0.17 %	2.967	69.409	0.20 %
2	5	60.653	2.596	60.730	0.13 %	2.600	60.823	0.28 %
3	3.333	54.174	2.319	54.250	0.14 %	2.320	54.273	0.18 %
4	2.5	48.893	2.093	48.963	0.14 %	2.095	49.010	0.20 %
5	2	44.354	1.898	44.401	0.10 %	1.900	44.448	0.20 %
6	1.667	40.317	1.725	40.354	0.09 %	1.726	40.377	0.14 %
7	1.429	36.651	1.567	36.658	0.02 %	1.569	36.705	0.15 %
8	1.25	33.290	1.421	33.242	0.14 %	1.424	33.312	0.06 %
9	1.111	30.205	1.285	30.061	0.47 %	1.287	30.108	0.32 %
10	1	27.396	1.160	27.137	0.90 %	1.164	27.230	0.60 %

Приближенные значения 1-й частоты колебаний системы 2-х стержней отличаются от точных менее чем на 1 %.

Метод сочленения элементов с учетом квазистатики оказывается сходящимся. Как было показано в главах 1 и 2, вычисление по этому методу основной частоты колебаний двухопорного весомого вала с диском на консоли и трехстержневой системы с податливостью даже в первом приближении дает высокую точность. Поэтому в главе 3 будем использовать его как точный метод для оценки точности исследуемого в этой главе метода сил.

Численные расчеты, представленные в параграфе 7 данной главы, позволяют оценить точность метода сил в задаче о нахождении 1-й частоты колебаний системы 3-х стержней (см. табл. 4).

$$z = 1, \quad \tilde{\delta} = 72.917$$

Таблица 4

№	l	ζ	k_{12}	k_{32}	Значения 1-й частоты по методу сил (безразмерные)	Значения 1-й частоты с учетом квазистатики (безразмерные)	Погрешность
1	20	0.5	1920000	160000	3.220	3.208	0.37 %
2	10	0.5	1920000	10000	2.970	2.965	0.17 %
3	6.667	0.5	1920000	1975	2.770	2.766	0.14 %
4	5	0.5	1920000	625	2.600	2.597	0.11 %
5	4	0.5	1920000	256	2.452	2.450	0.0008 %
6	3.333	0.5	1920000	123.457	2.321	2.320	0.0004 %
7	2.857	0.5	1920000	66.639	2.202	2.202	0 %
8	2.5	0.5	1920000	39.062	2.094	2.093	0.0005 %
9	2.222	0.5	1920000	24.387	1.993	1.993	0 %
10	2	0.5	1920000	16	1.899	1.899	0 %

В заключении приведены основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

3. Основные результаты и выводы

1. Получено представление кинетической и потенциальной энергий системы упругих тел в виде канонических квадратичных форм от избыточных координат системы и их производных по времени.

2. Численным экспериментом показана сходимость и определена точность метода сочленения элементов с учетом квазистатики на примере решения 2 – х задач о колебаниях систем упругих тел:

- весомого двухопорного вала с диском на консоли;
- системы 3-х стержней, 2 из которых совершают изгибные колебания, а один – продольные.

3. Установлена связь метода сил, рассматривающего реакции связей как обобщенные лагранжевы координаты, с методом сочленения элементов с

учетом квазистатики. Показано, что метод сил дает высокую точность за счет учета всех собственных форм колебаний элементов системы не только в потенциальной, но и в кинетической энергиях.

4. Разработана методика применения метода сил к механической системе, состоящей из трех стержней.

5. Анализ сравнения приближенных результатов с точными позволяет сделать вывод о том, что развиваемые два метода с высокой точностью описывают колебания систем упругих тел с распределенными параметрами.

4. Список публикаций

1. *С.В.Алмазова.* К вопросу о применении метода определения собственных частот и функций системы упругих тел через собственные функции ее элементов // Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Математика. Механика. Астрономия. 2005. Вып. 3. С.74-77.

2. *С.В.Алмазова.* Приближенная формула расчета собственных частот поперечных колебаний двухопорного вала с диском на консоли // Проблемы механики и управления: нелинейные динамические системы (Межвуз. сб. науч.тр.). Вып.37. Пермь: Перм. ун-т. 2005. С.8-14.

3. *С.В.Алмазова.* О колебаниях одной трехстержневой системы // Избранные Труды Международной научной конференции по механике «Четвертые Поляховские чтения». СПб: Изд. «ВВМ». 2006. С.95-105.

4. *С.В.Алмазова.* Колебания вращающегося двухопорного вала с диском на консоли. // Материалы докладов Международной конференции «Четвертые Окуневские Чтения». Т.1: Теор. и прикладная механика. СПб: Балт. гос. техн. ун-т. 2005. С.38-41.

5. *С.В.Алмазова, Д.Шевалье, М.П.Юшков.* О приближенном методе определения частот и собственных форм колебаний системы упругих тел // Тезисы докладов «Пятого Международного Симпозиума по классической и небесной механике». Москва – Великие Луки. 2004. С.24-25.

6. *С.В.Алмазова, М.П.Юшков.* О некоторых особенностях вынужденных нелинейных колебаний балки с несмещаемыми опорами. // Тезисы докладов Международной конференции «Пятое Окуневские чтения» 26-30 июня 2006 г., С.-Петербург, Россия. СПб: Балт. гос. техн. ун-т. 2006. С. 35-36.