На правах рукописи

**Шляго Павел Юрьевич**

# Локальная параметрическая идентифицируемость систем, аппроксимирующих сложные объекты

Специальность 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2007 г.

Работа выполнена на кафедре высшей математики №1 факультета электроники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ».

**Научный руководитель**

доктор физико-математических наук, профессор
Пилюгин Сергей Юрьевич

**Официальные оппоненты**

доктор физико-математических наук, профессор
Гелиг Аркадий Хаимович

доктор физико-математических наук, профессор
Флегонтов Александр Владимирович

**Ведущая организация**

Санкт-Петербургский университет телекоммуникаций
имени проф. М. А. Бонч-Бруевича

Защита состоится «.....» .................... 2007 года в ........ час. ....... мин. на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28.

Защита будет проходить в помещении Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. Фонтанки, 27, ауд. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9.

Автореферат разослан «.....» .................... 2007 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29
доктор физ.-мат. наук, профессор В. М. Нежинский

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## Актуальность темы

Основными моделями сложных динамических процессов в естествознании являются нелинейные дифференциальные уравнения, поэтому как с теоретической, так и с практической точки зрения, актуально изучение различных свойств этих уравнений. Одним из таких свойств является свойство параметрической идентифицируемости.

При проведении различных практических экспериментов и при моделировании изучаемая система обычно зависит от некоторого количества параметров. В большинстве случаев набор параметров можно представить в виде вектора некоторой размерности, поэтому при теоретических исследованиях удобнее рассматривать системы с одним параметром.

Под параметрической индентифицируемостью модельной системы подразумевается возможность различить два разных значения параметра системы по поведению ее траекторий при этих значениях параметра, что делает решение данной задачи актуальным не только для теоретических исследований, но и для практических применений.

Пусть $\Lambda$ — множество всех возможных параметров системы. Предположим, что в $\Lambda$ введена некоторая метрика $\rho$.

Для большинства классов модельных систем глобальная параметрическая идентифицируемость невозможна, т. е. невозможно различить два любых параметра $\lambda_1$, $\lambda_2$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), лежащих в множестве $\Lambda$, поэтому большую практическую ценность представляет локальная параметрическая идентифицируемость.

Под локальной параметрической идентифицируемостью (локальной идентифицируемостью) модельной системы при значении параметра $\lambda_1 \in \Lambda$ подразумевается существование такого числа $\varepsilon > 0$, что по наблюдению траекторий модельной системы возможно различить параметры $\lambda_1$, $\lambda_2$ при $\lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\rho(\lambda_1, \lambda_2) < \varepsilon$.

Отметим, что для нелинейного дифференциального уравнения нахождение решения в явном виде возможно только в исключительных случаях, поэтому для исследования данных систем используются численные методы. Намеченную выше задачу также целесообразнее рассматривать как для исходной модельной системы, так и для ее аппроксимации.

В диссертационной работе исследованы задача локальной параметрической идентифицируемости для конечномерных динамических систем, порожденных дискретизациями параболических уравнений, некоторые свойства этих систем и связь свойств исходных уравнений со свойствами их дискретизаций; изучено свойство различимости (близкое к свойству идентифицируемости) по численному методу моделируемой пары «процесс — измерительное устройство»; исследована задача локальной параметрической идентифицируемости нелинейной системы дифференциальных уравнений по численному методу при условии периодичности исходной системы по времени и существования гиперболически устойчивого решения с тем же периодом при заданном в постановке задачи значении параметра.

## Цель работы

Основной целью работы является исследование задачи локальной параметрической идентифицируемости для динамических систем, порождаемых численными методами для систем дифференциальных уравнений.

## Методы исследования

Для получения результатов использовались методы теории динамических систем, дифференциальных уравнений, функционального анализа и др.

## Научная новизна

Все результаты диссертационной работы являются новыми. Выделим основные из них:

— Получены условия, при которых различимость фиксированной системы дифференциальных уравнений по фиксированному численному методу обеспечивается типичным измеряющим устройством.

— Для уравнения Чэфи-Инфанте с нелинейностью, линейно зависящей от параметра, получены условия, при которых для открытого и плотного множества начальных данных динамическая система, порождаемая полунеявной схемой Эйлера, локально идентифицируема.

— Для класса конечномерных отображений, порождаемых кусочно-линейными функциями фазовой переменной и параметра, который включает в себя отображения, порожденные полунеявной схемой Эйлера, доказано, что для типичной функции $f$ из этого класса параметр $\lambda$ локально идентифицируем по наблюдению траекторий соответствующей динамической системы.

— Доказано, что свойство гиперболичности неподвижных точек является типичным свойством для дискретизаций параболических уравнений с нелинейностью, линейно зависящей от параметра.

— Для нелинейной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$, $\omega$-периодической по $t$ и имеющей при значении параметра $\lambda_0$ $\omega$-периодическое гиперболически устойчивое решение, получены условия, при которых система локально параметрически идентифицируема при $\lambda_0$ по наблюдению траекторий численного метода.

## Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты важны как для теоретического исследования задачи о локальной параметрической идентифицируемости динамических систем, полученных с помощью численных методов для различных систем дифференциальных уравнений, так и для разработки методов практического решения задачи о локальной параметрической идентифицируемости.

## Апробация работы

Отдельные результаты по теме диссертационной работы были доложены на конференциях:

— Международная конференция «Пятые Окуневские чтения», СПб, 2006;

— I Международная научно-техническая конференция «Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем», Пенза, 2006;

— Политехнический симпозиум «Молодые ученые — промышленности Северо-Западного региона», СПб, 2006.

## Публикации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в статьях [1–5] и тезисах докладов [6–8].

## Структура и объем работы

Диссертация содержит 85 страниц машинописного текста и состоит из введения, трех глав и списка литературы из 22 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** дан краткий обзор исследуемых математических объектов и сформулированы основные результаты диссертационной работы.

**В первой главе** изучается свойство, близкое к индентифицируемости, — различимость.

Рассмотрим гладкое $n$-мерное многообразие $X$ класса гладкости $C^\infty$ и систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x),\ x \in X. \tag{1}$$

Пусть $F \in \mathscr{X}^r, r \geq 1$, где $\mathscr{X}^r$ — пространство всех векторных полей класса $C^r$, определенных на $X$. Пусть $H \in \mathscr{C}^r(X, \mathbb{R}^k)$, где $\mathscr{C}^r(X, \mathbb{R}^k)$ — пространство всех отображений класса $C^r$ из $X$ в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$.

С практической точки зрения объекты, введенные выше, имеют следующий смысл: система (1) моделирует некоторый сложный процесс, а отображение $H$ является моделью измеряющего устройства.

Введем в $\mathscr{C}^r(X, \mathbb{R}^k)$ сильную $C^r$-топологию Уитни.

Через $\varphi(t, x)$ обозначим траекторию системы (1) с начальными данными $t_0 = 0$, $x_0 = x$. Предположим для определенности, что все решения рассматриваемых систем продолжимы для всех $t \in \mathbb{R}$.

Пусть dist — риманова метрика на многообразии $X$.

**Определение 1.3.** *Будем называть семейством численных методов класса $C^m$ и степени $p$ семейство отображений*

$$\Phi(h, \cdot):\ X \to X, \quad h \geq 0,$$

*класса $C^m$ по $x$ ($m \geq 1,\ p \geq 0$), аппроксимирующее решения $\varphi$ системы* (1) *в следующем смысле: для любого ограниченного подмножества $Y \subset X$ существует такая константа $C(Y)$, что*

$$\operatorname{dist}\left(\Phi(h, x), \varphi(h, x)\right) \leq C(Y) h^{p+1}$$

*для всех $h > 0$ и $x \in Y$.*

Представителя введенного выше семейства будем называть численным методом с шагом $h$. Подчеркнем, что мы не предполагаем какой-либо (даже непрерывной) зависимости $\Phi(h, x)$ от шага $h$.

**Определение 1.4.** *Назовем пару $(F, H)$ различимой на множестве $Y \subset X$ по численному методу $\Phi$ с шагом $h$ за $N$ шагов, если для любой пары точек*

*$(x, y)$, $x \neq y$, $x, y \in Y$, существует такое натуральное число $i \leq N$, что*

$$H(\Phi^i(h, x)) \neq H(\Phi^i(h, y)).$$

Рассмотрим систему (1) в $\mathbb{R}^n$. Пусть $K_0$ — такое , что $K_0$ — положительно инвариантное относительно системы (1) открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что

$$F(x) \neq 0 \text{ при } x \in K = \overline{K_0}. \tag{2}$$

Основным результатом первой главы является следующее утверждение.

**Теорема 1.2.** *Для фиксированного векторного поля $F$ класса гладкости $C^2$, обладающего свойством (2), $C^r$-гладкого ($r \geq 1$) семейства численных методов $\Phi(h, \cdot)$ степени 1 и числа $N = \left[\frac{2n}{k}\right] + 1$, где $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа, существует такое число $h_0 > 0$, что множество таких функций $H \in \mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, для которых пара $(F, H)$ различима по численному методу $\Phi$ с шагом $h \leq h_0$ за $N$ шагов на компакте $K$, является множеством второй категории по Бэру в $\mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.*

Теорема 1.2 является обобщением аналогичного утверждения, сформулированного Д. Айелсом для точных решений, на многомерный случай.

**Во второй главе** изучается задача о локальной параметрической идентифицируемости для конечномерных динамических систем, порожденных дискретизациями параболических уравнений.

Рассмотрим параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(u, \lambda), \quad x \in (0, 1),\ t > 0,\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $G$ — достаточно гладкая скалярная функция, с краевыми условиями Дирихле $u(0, t) = u(1, t) = 0$ и начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$.

Фиксируем натуральное число $M$, параметр $\lambda$ и число $h > 0$ и положим $d = \frac{1}{M+1}$. Будем аппроксимировать значения $u(md, nh)$ решений уравнения (3) с $n \geq 0$, $m \in \{0, 1, \ldots, M+1\}$ числами $v_m^n$, определяемыми следующим уравнением

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{h} = Av^{n+1} + \underline{G}(v^n, \lambda), \tag{4}$$

где

$$v^n = \begin{pmatrix} v_1^n \\ \vdots \\ v_M^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M \text{ и } \underline{G}(v^n, \lambda) = \begin{pmatrix} G(v_1^n, \lambda) \\ \vdots \\ G(v_M^n, \lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M,$$

$$v_i^0 = u_0(id) \quad i = 1, \dots, M,$$

а матрица $A$ соответствует стандартной аппроксимации второй производной на сетке с шагом $d$:

$$(Av^n)_i = \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{d^2}, \quad i = 1, \dots, M,$$

и краевым условием $v_0^n = v_{M+1}^n = 0$. Если значение $h$ столь мало, что матрица $J = E_M - hA$ обратима, где $E_M$ — единичная матрица размера $M \times M$, то схема (4) порождает такое отображение $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$, что $v^{n+1} = \varphi_\lambda(v^n)$, а

$$\varphi_\lambda(v) = J^{-1}(v + h\underline{G}(v, \lambda)). \tag{5}$$

**Определение 2.3.** *Будем говорить, что уравнение* (3) *локально идентифицируемо при параметре* $\lambda_0$ *по наблюдению траектории дискретизации* $w_n$ *с начальным данным* $w_0$*, если существует такое число* $\delta > 0$*, что для любого параметра* $\lambda, 0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$ *и для любого начального данного* $u_0 \in \mathbb{R}^M$*, найдется такое натуральное число* $n_0$*, что при* $n \geq n_0$

$$\varphi_\lambda^n(u_0) \neq \varphi_{\lambda_0}^n(w_0). \tag{6}$$

В разделе 2.2 рассматривается дискретизация уравнения типа Чэфи-Инфанте с нелинейностью, линейно зависящей от параметра, т. е. рассматривается параболическое уравнение вида (3) с нелинейностью вида

$$G(u, \lambda) = \lambda f(u),$$

где $\lambda > 0$, а функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ класса $C^2$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(0) = 0, \; f'(0) = 1;$
2. $\overline{\lim}_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{u} \leq 0;$
3. $uf''(u) < 0$ при $u \neq 0$.

Обозначим через $B$ множество пар $(\lambda, f)$, где $\lambda > 0$, а функция $f \in C^2$ и удовлетворяет перечисленным выше условиям 1–3. Из условия 1 следует, что 0 — неподвижная точка диффеоморфизма $\varphi_\lambda$ при любом $\lambda > 0$.

Основным результатом раздела 2.2 является следующая теорема.

**Теорема 2.2.** *Пусть пара $(\lambda_0, f) \in B$ обладает следующими свойствами:*

*1) все неподвижные точки диффеоморфизма $\varphi_{\lambda_0}$ гиперболические;*

*2) неподвижная точка $v = 0$ диффеоморфизма $\varphi_{\lambda_0}$ неустойчива.*

*Тогда для открытого и плотного в $\mathbb{R}^M$ множества начальных данных $w_0$ уравнение* (3) *локально идентифицируемо при $\lambda_0$ по наблюдению траектории дискретизации $w_n$ с начальным данным $w_0$.*

В разделе 2.3 изучается общий класс конечномерных отображений, порождаемых кусочно-линейными функциями фазовой переменной и параметра. Класс таких отображений включает в себя отображения, порожденные полунеявной схемой Эйлера. Предположение о кусочной линейности функции, порождающей изучаемое отображение, соответствует наиболее распространенному методу аппроксимаций нелинейных функций их значениями на сетках.

Рассмотрим семейство положительно определенных, симметричных матриц $B(h)$ размера $M \times M$, $M \in \mathbb{N}$, зависящих от параметра $h > 0$. Фиксируем непрерывную скалярную функцию $g$, зависящую от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ и рассмотрим отображение $\varphi_{g,\lambda} : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$, задаваемое формулой

$$\varphi_{g,\lambda}(v) = B(h)(v + h\underline{g}(v, \lambda)), \tag{7}$$

где

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M \text{ и } \underline{g}(v, \lambda) = \begin{pmatrix} g(v_1, \lambda) \\ \vdots \\ g(v_M, \lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M.$$

Отображение (5), полученное с помощью полунеявной схемы Эйлера, является частным случаем отображений (7).

Рассмотрим плоскость $x, \lambda$ ($x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$) и введем на ней прямоугольную сетку, симметричную относительно начала координат, т. е. фиксируем натуральное число $N$, и числа $h_x$, $h_\lambda > 0$, пусть $\Gamma = \{-N, \ldots, N\}$ — множество индексов узлов, а $\gamma_{i,j} = (ih_x, jh_\lambda)$, $i, j \in \Gamma$, — узлы сетки.

Положим $X = [-Nh_x, Nh_x]$, $\Lambda = [-Nh_\lambda, Nh_\lambda]$. Фиксируем набор чисел $g_{i,j} = g(\gamma_{i,j})$, $i, j \in \Lambda$, и построим по этому набору кусочно-линейную функцию $f$ таким образом, что $f(\gamma_{i,j}) = g_{i,j}$.

Положим в треугольниках $\gamma_{i,j}, \gamma_{i+1,j}, \gamma_{i+1,j+1}$, $i, j \in \{-N, \ldots, N-1\}$,

$$f(x, \lambda) = g_{i+1,j} + (g_{i+1,j+1} - g_{i+1,j})\frac{\lambda - jh_\lambda}{h_\lambda} +$$

$$+(g_{i+1,j} - g_{i,j})\frac{x - (i+1)h_x}{h_x},$$

а в треугольниках $\gamma_{i,j}, \gamma_{i+1,j+1}, \gamma_{i,j+1}$, $i, j \in \{-N, \ldots, N-1\}$,

$$f(x, \lambda) = g_{i,j+1} + (g_{i,j+1} - g_{i,j})\frac{\lambda - (j+1)h_\lambda}{h_\lambda} +$$

$$+(g_{i+1,j+1} - g_{i,j+1})\frac{x - ih_x}{h_x},$$

т. е. в каждом из треугольников разбиения функция $f$ задается уравнением плоскости. Эта функция определена и непрерывна в прямоугольнике $X \times \Lambda$.

Продолжим функцию $f$ непрерывно на все пространство $\mathbb{R}^2$ так, чтобы при любом фиксированном $\lambda \in \Lambda$ функция $f$ обладала глобальной константой Липшица $L(f, \lambda)$ по $x$ на всей вещественной оси.

Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех кусочно-линейных функций, построенных по описанной схеме на фиксированной сетке. Для множества $\mathcal{L}$ введем метрику

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{i,j \in \Gamma} |f_1(\gamma_{i,j}) - f_2(\gamma_{i,j})|.$$

Обозначим полученное пространство через $\mathcal{F}$.

Пусть для любого $\lambda \in \Lambda$ выполнено неравенство $2hL(f, \lambda) < 1$. При этом условии отображение $\varphi_{f,\lambda}$ является гомеоморфизмом $\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ (доказано в лемме 2.1).

Предположим, что для фиксированного параметра $\lambda \in \Lambda$ существует такое число $P_\lambda > 0$, что из неравенств $|v_i^0| \le P_\lambda$, $i = 1, \ldots, M$ следует, что $|v_i^n| \le P_\lambda$, где $v^{n+1} = \varphi_{f,\lambda}(v^n)$, $v^0 \in \mathbb{R}^M$, $n \in \mathbb{N}$.

Будем считать, что возможно выбрать такое значение $h_x$, что для всех $\lambda \in \Lambda$ выполнено неравенство $P_\lambda < Nh_x$. Будем, кроме того, предполагать, что неподвижные точки отображения $\varphi_{f,\lambda}$ принадлежат множеству $X^M = X \times \ldots \times X$.

Основным результатом раздела 2.3 является следующая теорема.

**Теорема 2.3.** *Существует такое открытое и плотное подмножество $\mathcal{F}'$ пространства $\mathcal{F}$, что если $f \in \mathcal{F}'$, а $\lambda \in \Lambda$, то существует такое число $\varepsilon > 0$ (зависящее от $f$ и $\lambda$), что для любых точек $v^0, w^0 \in \mathbb{R}^M$ и параметра $\lambda_0$ с $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ существует такое натуральное число $n_0$, что $v^n \neq w^n$ при $n \geq n_0$, где $v^{l+1} = \varphi_{f,\lambda}(v^l)$ и $w^{l+1} = \varphi_{f,\lambda_1}(w^l)$.*

В разделе 2.4 показывается, что свойство гиперболичности неподвижных точек является типичным свойством для дискретизаций параболических уравнений с параметром. Этот результат говорит о том, что условие 1 теоремы 2.2 из раздела 2.2 не является существенным ограничением на множество идентифицируемых значений параметра $\lambda$.

Рассмотрим параболическое уравнение вида (3) с нелинейностью вида

$$G(u, \lambda) = \lambda f(u),$$

где $\lambda > 0$.

Будем рассматривать полунеявную дискретизацию уравнения (3) по схеме (4).

Рассмотрим пространство пар $(\lambda, f)$, где $\lambda > 0,\ f \in C^p(\mathbb{R})$. Обозначим его через $PC^p$.

Для пар $\xi = (a, f),\ \eta = (b, g) \in PC^p$, натурального числа $p \geq 1$ и множества $A \subset \mathbb{R}$ определим

$$\rho_A^p(\xi, \eta) = |a - b| + \sum_{r=0}^{p} \sup_{x \in A} \left| \frac{\partial^r f}{\partial x^r}(x) - \frac{\partial^r g}{\partial x^r}(x) \right|. \tag{8}$$

Пространство $PC^p$ с топологией равномерной $PC^p$-сходимости обозначим через $\mathcal{F}^p$. Фиксируем компактное множество $K \subset \mathbb{R}^M$.

Основным результатом раздела 2.4 является следующая теорема.

**Теорема 2.4.** *Для $p \geq 1$ множество*

$$\mathcal{H}^p(K) = \{\, (\lambda, f) \in \mathcal{F}^p \mid \text{неподвижные точки диффеоморфизма } \varphi \text{ в } K \text{ гиперболические}\}$$

*является множеством второй категории по Бэру в $\mathcal{F}^p$.*

**В третьей главе** рассматривается задача идентифицируемости для 1-периодической по $t$ системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \tag{9}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^m$ — параметр. Предполагается, что функция $f$ достаточно гладкая по $x$ и $\lambda$.

Обозначим через $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ решение задачи Коши $x(t_0) = x_0$ системы (9). Если решение $x(t, 0, x_0, \lambda)$ определено на отрезке $[0, 1]$, то отображение Пуанкаре $T_\lambda$ определено в точке $x_0$ следующим образом: $T_\lambda(x_0) = x(1, 0, x_0, \lambda)$.

Пусть $\varphi_{\lambda_0}$ — 1-периодическое решение системы (9) и пусть $p(\lambda_0) = \varphi_{\lambda_0}(0)$ — его начальное значение при $t = 0$.

**Определение 3.1.** *Будем называть периодическое решение $\varphi_{\lambda_0}(t)$ гиперболически устойчивым, если собственные числа $\mu_j$ матрицы Якоби $DT_{\lambda_0}(p(\lambda_0))$ удовлетворяют неравенствам $|\mu_j| < 1$, $j = 1, ..., N$.*

Наше основное предположение заключается в следующем: для $\lambda = \lambda_0$, система (9) имеет 1-периодическое решение $\varphi_{\lambda_0}(t)$, и это решение гиперболически устойчиво.

Тогда при $\lambda$, близких к $\lambda_0$, система (9) имеет такие гиперболически устойчивые 1-периодические решения $\varphi_\lambda(t)$, что их начальные значения $p(\lambda) = \varphi_\lambda(0)$ удовлетворяют соотношению $p(\lambda) \to p(\lambda_0)$, $\lambda \to \lambda_0$.

Рассмотрим численный метод $\Phi_{\lambda,h}$ для системы (9) с шагом по времени $h = \frac{1}{\nu}$, где $\nu$ — натуральное число. Предположим, что метод имеет порядок $q$, т. е. выполнена следующая оценка погрешности метода на одном шаге:

$$|x(t_0 + h, t_0, x_0, \lambda) - \Phi_{\lambda,h}(t_0, x_0)| \le Ch^{q+1}, \tag{10}$$

где $C$ — единая константа для всех начальных значений $x_0$ из компактного подмножества множества $\mathbb{R}^N$, для всех $h > 0$, и для всех $\lambda$, принадлежащих ограниченному подмножеству множества $\mathbb{R}^m$.

Фиксируем шаг по времени $0 < h < 1$.

Процедура идентификации основана на рассмотрении векторов

$$\tau_\lambda(n, x_0) = \Phi^n_{\lambda,h}(0, x_0), \tag{11}$$

которые аппроксимируют значения $x(n, 0, x_0, \lambda) = T^n_\lambda(x_0)$ итераций отображения Пуакаре.

Основной результат третьей главы:

**Теорема 3.1.** *Предположим, что существуют такие положительные числа $a_0$, $A$ и $l$, что $|p(\lambda) - p(\lambda_0)| \ge A\,|\lambda - \lambda_0|^l$ при $|\lambda - \lambda_0| \le a_0$. Пусть*

*$R$ — компактное подмножество области притяжения $B_{\lambda_0}$ притягивающей неподвижной точки $p(\lambda_0)$ отображения $T_{\lambda_0}$. Тогда существует такое число $a_1 > 0$, что система (9) локально идентифицируема по наблюдению значений (11) в следующем смысле: для любого числа $\lambda$, $0 < |\lambda - \lambda_0| < a_1$, существуют такие числа $h_0$ и $n_0$, что если $h < h_0$ и $x, y \in R$, то $\tau_\lambda(n, x) \neq \tau_{\lambda_0}(n, y)$ при $n \geq n_0$.*

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ


[1] **Шляго, П. Ю.** Локальная идентифицируемость параболических уравнений по их дискретизациям [Текст] / П. Ю. Шляго, Н. А. Бодунов, С. А. Колбина; под. ред. Г. А. Леонова // Нелинейные динамические системы. — Вып. 5. — СПб.: Изд. С.-Петербург. ун-та, 2005. — С. 31–38.

[2] **Шляго, П. Ю.** Типичность свойства гиперболичности для дискретизаций параболических уравнений с параметром [Текст] / П. Ю. Шляго — М., 2004. — 14 с. — Деп. в ВИНИТИ 14.05.2004, №813-В2004.

[3] **Шляго, П. Ю.** Типичная различимость систем дифференциальных уравнений по наблюдению траекторий численных методов [Текст] / П. Ю. Шляго // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — СПб., 2006. — № 3. — С. 14–27. — ISSN 1817-2172.

[4] **Шляго, П. Ю.** Локальная параметрическая идентифицируемость дискретизованных параболических уравнений [Текст] / П. Ю. Шляго // Дифференциальные уравнения. — М.: Наука/Интерпериодика, 2007. — Т. 43, № 4. — С. 570–571. — ISSN 0374-0641

[5] **Shlyago, P. Yu.** Local identifiability of periodic systems by observation of their discretizations [Текст] / P. Yu. Shlyago, N. A. Bodunov // Differential Equations and Dynamical Systems. An International Journal for Theory, Applications & Computer Simulations. — [India], 2006. — Vol. 14, N 3/4. — P. 315–321. — ISSN 0971-3514

[6] **Шляго, П. Ю.** Наблюдаемость нелинейных дифференциальных уравнений при компьютерном моделировании [Текст] / П. Ю. Шляго // Международная конференция «Пятые Окуневские чтения»: тезисы докладов / Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2006. — С. 170. — ISBN 5-85546-208-X.

[7] **Шляго, П. Ю.** Различимость по наблюдению при компьютерном моделировании сложных процессов [Текст] / П. Ю. Шляго // Аналитические

и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сборник статей I Международной научно-технической конференции. — Пенза, 2006. — С. 172–174. — ISBN 5-8356-0529-3.

[8] **Шляго, П. Ю.** Типичная различимость систем дифференциальных уравнений по наблюдению траекторий численных методов [Текст] / П. Ю. Шляго // Молодые ученые — промышленности Северо-Западного региона: материалы конференций политехнического симпозиума. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. — С. 101. — ISBN 5-7422-1365-4.

В работах [1] и [5] включенные в диссертацию результаты доказаны П. Ю. Шляго, а постановка задачи принадлежит Н. А. Бодунову.