

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*На правах рукописи*

Пасынкова Инна Анатольевна

**ДИНАМИКА ПРЕЦЕССИОННОГО ДВИЖЕНИЯ  
НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА**

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2007

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Официальные оппоненты:

член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор Леонов Геннадий Алексеевич

доктор физико-математических наук,  
профессор Блехман Илья Израилевич

доктор физико-математических наук,  
профессор Кривцов Антон-Иржи Мирославович

Ведущая организация: Вычислительный центр имени А. А. Дородницына  
Российской академии наук

Защита состоится “ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2007 в \_\_\_ ч. \_\_\_ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.232.30 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Санкт-Петербургском государственном университете в ауд.3536 по адресу:  
198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., дом 28.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: Санкт-Петербург, Университетская набережная., д. 7/9.

Автореферат разослан “ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2007.

Ученый секретарь диссертационного совета  
доктор физико-математических наук

Зегжда С. А.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы диссертации.** Современный уровень развития техники, машиностроения и транспорта предъявляет высокие требования к частоте вращения роторных машин. Как правило, требуется, чтобы рабочий диапазон угловых скоростей вращения был достаточно высоким и при этом должно быть обеспечено безопасное прохождение через резонансную область.

Начало теоретическим исследованиям динамики быстровращающихся валов положила короткая заметка известного шотландского ученого Уильяма Рэнкина, опубликованная в 1869 г., в которой он впервые применил теорию поперечных колебаний стержней, разработанную Пуассоном, к динамике быстровращающихся валов и первым понял, что критическая угловая скорость вала достигается в тот момент, когда вал, как упругий стержень, теряет устойчивость своей прямолинейной формы. Первые математические модели вращающегося вала были созданы профессором Мюнхенского университета Фёшплем в 1895 г. и независимо профессором Ирландского Королевского колледжа Джеффкоттом в 1919 г. Фёшплем первым обнаружил явление самоцентрирования ротора и тем самым теоретически обосновал возможность работы со сверхкритическими скоростями. Инженерная практика опережала теоретические исследования. В 1883 г. выдающийся шведский инженер и изобретатель Карл Лаваль получил патент на морскую реверсивную паровую турбину с рабочей скоростью 42000 об/мин, которая была заведомо выше, чем критическая скорость Рэнкина. Начиная с работы Данкерлея, который в 1894 г. предложил эмпирические формулы для расчета критических угловых скоростей вала, усилия многих выдающихся механиков XX века были направлены на создание и обоснование приближенных методов определения критических частот вращения. Следует отметить труды А. Стодолы, Р. Граммеля, А.Н. Крылова, Ф.М. Диментберга и др.

В последнее время большое внимание в работах по динамике роторов уделяется влиянию различных нелинейных факторов на устойчивость и характер движения роторных систем. Часто по самой постановке задачи нелинейные факторы не могут рассматриваться как малые дополнительные члены в линейной задаче. Важное значение имеет изучение динамики ротора с четырьмя степенями свободы, что позволяет обнаружить новые явления, которые не может обнаружить модель ротора Фёшпля — Джеффкотта, имеющего две степени свободы.

В силу вышесказанного тема настоящей работы, посвященной исследованию динамики прецессионного движения неуравновешенного ротора с четырьмя степенями свободы в упругих нелинейных опорах, является актуальной.

**Цель работы.** Основной целью работы является изучение прямых синхронных прецессий ротора, вызванных его дисбалансом. Была поставлена задача качественного исследования отдельно цилиндрических, конических, а также связанных цилиндрических и конических (гиперболоидальных) колебаний как жесткого,

так и гибкого ротора с четырьмя степенями свободы при различных нелинейных характеристиках упругих опор. В рамках поставленной задачи требуется провести исследование устойчивости прецессий во всем диапазоне угловых скоростей вращения ротора и определить сценарии потери устойчивости.

**Методы исследований.** Используются классические методы теории нелинейных колебаний и теории устойчивости движения, а также предложенный автором новый метод изучения прецессионного движения неуравновешенного ротора. Для исследования полученных численным моделированием аттракторов применяются методы спектрального анализа и современные алгоритмы нелинейной динамики.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты:

- Разработан новый подход в исследовании прямых синхронных прецессий, позволяющий исследовать связанные цилиндрические и конические колебания ротора, вызванные его статическим и динамическим дисбалансом.
- В рамках предложенного подхода аналитически и численно проведено исследование гиперболоидальной, цилиндрической и конической прецессий жесткого ротора в упругих нелинейных изотропных опорах. Рассмотрены упругие характеристики опор существенно нелинейные (типа Герца) и содержащие линейный и кубический члены (типа Дуффинга). Установлены параметры самоцентрирования ротора.
- В линейном приближении проведено исследование устойчивости прецессионного движения неуравновешенного ротора. Изучены различные сценарии потери устойчивости цилиндрической и конической прецессий во всем диапазоне угловых скоростей, в том числе появление квазипериодических и хаотических аттракторов, эффекта "затягивания неустойчивости".
- Для статически и для динамически неуравновешенного ротора проведено численное исследование прямого и обратного нестационарного перехода через резонансную область, которое показало существенную роль внутреннего трения в процессе возникновения хаотических колебаний нарастающей амплитуды в закритической области.
- Метод, разработанный для жесткого ротора, применен для исследования прецессий неуравновешенного ротора с четырьмя степенями свободы, насаженного на линейно упругий безмассовый вал, который в свою очередь укреплен в упругих опорах. Введено определение цилиндрической, конической и гиперболоидальной прецессии ротора на гибком валу.
- Изучено влияние упругих опор на критические частоты гибкого ротора в линейных упругих опорах и проведено сравнение с известными результатами для жестких опор.

- Проведено исследование симметричной гиперболоидальной прецессии полностью неуравновешенного ротора на гибком валу в нелинейных упругих опорах без учета сил сопротивления.
- Для статически и для динамически неуравновешенного гибкого ротора исследованы цилиндрические и конические прецессии в подшипниках типа Герца и типа Дуффинга при учете сил внешнего и внутреннего сопротивления во всем диапазоне угловых скоростей. Показано, что в закритической области имеют место бифуркации Андронова — Хопфа, хаотизация предельных циклов, переходы типа "хаос — хаос" и практически неограниченный рост амплитуды прецессии.

**Теоретическая и практическая ценность.** Диссертация имеет теоретический характер. Введенные в ней понятия, развитые методы и полученные результаты применимы при исследовании и конструировании быстровращающихся роторных машин. На основании результатов исследования могут быть сделаны практические рекомендации, касающиеся ширины резонансной зоны, условий ее прохождения, а также определения границы возбуждения автоколебаний в закритической области. Материал, изложенный в диссертации, может быть использован при чтении специальных курсов по устойчивости нелинейных механических систем и динамике твердого тела.

**Апробация работы.** Полученные в работе результаты были представлены автором на следующих конференциях [2, 6, 7, 9, 11 — 13, 16, 18, 20 — 24, 27]:

Международная конференция "Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении". Саратов, 1997; Международные конференции "Окуневские чтения", Санкт-Петербург, 1997, 2004, 2006; Международные конференции "Поляховские чтения", Санкт-Петербург, 2000, 2006; "Den 7. Magdeburger Maschinenbau-Tage. 11.-12. Oktober 2005 an der Otto-von-Guericke-Universitaet", Magdeburg, 2005; Summer - School Conference "Advanced Problems in Mechanics", St. Petersburg (Repino), XXXIII—2005, XXXIV—2006; IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 2006.

Неоднократно результаты докладывались на секции теоретической механики в Доме Ученых им. М. Горького (2004 г. и 2005 г.) и на семинаре кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ.

**Публикации.** По теме диссертации имеется 28 публикаций, в том числе 11 статей в журналах, рекомендованных ВАК. В совместных работах [16 — 19] автору принадлежит постановка задачи и метод исследования. В совместных работах [20 — 22] по истории динамики роторов автору принадлежит исследование трудов Рэнкина, Лавалья, Джеффкотта, Стодолы, Николаи и других. Соавтору принадлежит исследование трудов Фёшля, Стэвара и Жуковского.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения и списка литературы, насчитывающего 118 наименований. Число иллюстраций равно 136. Общий объем работы 206 страниц.

## Содержание диссертации

Во **введении** обоснована актуальность исследуемой проблемы, приведена краткая история создания математических моделей динамики роторов, дан обзор литературы, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, описана структура диссертации, а также представлены положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** посвящена изучению стационарных движений несбалансированного жесткого ротора, укрепленного вертикально в упругих изотропных опорах. В §§ 1.1, 1.2 приводится описание модели неуравновешенного жесткого ротора с четырьмя степенями свободы и вывод уравнений движения при весьма общих предположениях о нелинейной характеристике упругих реакций опор. Ротор имеет массу  $M$  и длину  $L_r$ . Предполагается, что ротор динамически симметричный и его моменты инерции  $J_p$  (полярный) и  $J_t$  (трансверсальный). Ротор статически и динамически неуравновешен. Статический эксцентриситет равен  $e$ . Динамический эксцентриситет характеризуется двумя углами  $\delta$  и  $\varepsilon$ . Угол  $\delta$  – угол между осью динамической симметрии ротора и прямой, параллельной оси вращения, но проходящей через центр масс, а угол  $\varepsilon$  определяет фазовый сдвиг динамического эксцентриситета по отношению к статическому. Пусть ротор приводится во вращение двигателем, способным поддерживать заданный закон изменения угловой скорости вращения  $\varphi = \varphi(t)$ . Тогда, пренебрегая перемещением ротора вдоль оси вращения, его можно рассматривать как механическую систему с четырьмя степенями свободы. В качестве обобщенных координат выбраны декартовы координаты  $(x_j, y_j)$  ( $j = 1, 2$ )  $j$ -го конца оси ротора (шипа) в плоскости, перпендикулярной оси подшипников. Пусть ротор расположен нецентрально между опорами, так что расстояние от  $j$ -ой опоры до точки крепления к оси вращения равно  $e_j L$ ,  $j = 1, 2$ , где  $L$  расстояние между опорами. При этом если ротор укреплен консольно, то  $e_2 < 0$ , так что всегда выполняется  $e_1 + e_2 = 1$ . Рассматриваются изотропные опоры, следовательно, упругие восстанавливающие силы имеют только радиальную составляющую, равную  $\mathbf{F}_j = -F_j(|S_j|) \mathbf{n}_j$ . Здесь  $S_j = x_j + i y_j$  – смещение точки вала в  $j$ -ой опоре от равновесного положения, записанное в комплексной форме;  $\mathbf{n}_j$  – орт направления  $S_j$ . Функции  $F_j(|S_j|)$  непрерывно-дифференцируемые и  $F_j(0) = 0$ . Уравнения движения без учета сил сопротивления в комплексной форме имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M(e_2 \ddot{S}_1 + e_1 \ddot{S}_2) + F_1(|S_1|) \frac{S_1}{|S_1|} + F_2(|S_2|) \frac{S_2}{|S_2|} &= M e (\dot{\varphi}^2 - i \ddot{\varphi}) \exp(i\varphi), \\
 J_t (\ddot{S}_2 - \ddot{S}_1) - i J_p \dot{\varphi} (\dot{S}_2 - \dot{S}_1) - i J_p \ddot{\varphi} (S_2 - S_1) + \\
 + L^2 \left( e_2 F_2(|S_2|) \frac{S_2}{|S_2|} - e_1 F_1(|S_1|) \frac{S_1}{|S_1|} \right) &= (J_t - J_p) L \delta (\dot{\varphi}^2 - i \ddot{\varphi}) \exp(i(\varphi - \varepsilon)).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Уравнения движения жесткого ротора в форме (1) для случая вращения с постоянной скоростью в линейно-упругих неизотропных опорах получены С.П. Тимошенко, а для случая упругих нелинейных изотропных подшипников с контактом

типа Герца в работах А.С. Кельзона.

Для исследования системы (1) целесообразно перейти к безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$  и безразмерным переменным  $s_j = S_j/h$ . Здесь  $h$  — характерный линейный размер, например, статический эксцентриситет  $e$  или величина  $L\delta$ , а  $\omega_0$  — характерная угловая скорость, выбор которой определяется конкретным видом одной из нелинейных функций  $F_j(|S_j|)$ , например,  $F_1(|S_1|)$ . Так как по существу задачи величины  $S_j$  являются малыми, то абсолютная величина  $s_j$  при малом характерном размере будет порядка единицы. Пусть вращение ротора происходит с постоянной угловой скоростью  $\bar{\Omega}$ .

В комплексной форме, после перехода к безразмерным переменным  $s_j$ , безразмерному времени  $\tau$  и безразмерной угловой скорости  $\Omega = \bar{\Omega}/\omega_0$  уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} e_2 \ddot{s}_1 + e_1 \ddot{s}_2 + f_1(|s_1|) \frac{s_1}{|s_1|} + f_2(|s_2|) \frac{s_2}{|s_2|} &= d_1 \Omega^2 \exp(i \Omega \tau), \\ \ddot{s}_2 - \ddot{s}_1 - i \Omega \lambda (\dot{s}_2 - \dot{s}_1) + k l \left( e_2 f_2(|s_2|) \frac{s_2}{|s_2|} - e_1 f_1(|s_1|) \frac{s_1}{|s_1|} \right) &= \\ &= l d_2 \Omega^2 \exp(i (\Omega \tau - \varepsilon)). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь дифференцирование ведется по безразмерному времени  $\tau$ , и безразмерные силы  $f_j(|s_j|)$  задаются следующим образом  $f_j(|s_j|) = F_j(h|s_j|)/(hM\omega_0^2)$ . Остальные параметры, которые можно назвать конструкционными, имеют следующий смысл

$$k = \frac{M L^2}{(J_t - J_p)}, \quad \lambda = \frac{J_p}{J_t}, \quad l = 1 - \lambda, \quad d_1 = \frac{e}{h}, \quad d_2 = \frac{L\delta}{h}. \quad (3)$$

Заметим, что всегда справедливо  $k(1 - \lambda) > 0$ . Если ротор представляет динамически сжатое тело (типа "диск"), то параметр  $\lambda > 1$ , и, следовательно,  $k < 0$ . Если же ротор представляет динамически вытянутое тело (типа "сигара"), то  $\lambda < 1$ , и тогда  $k > 0$ .

В § 1.3 показано, что система уравнений (2) допускает точное решение вида:

$$s_j = R_j \exp(i \psi_j) \exp(i \Omega \tau), \quad j = 1, 2 \quad (4)$$

с комплексной амплитудой  $R_j \exp(i \psi_j)$ , где  $R_j > 0$ ,  $\psi_j$  — вещественные постоянные.

Величина  $R_j$  есть радиус круговой орбиты конца оси ротора (шипа), а  $\psi_j$  характеризует фазовый сдвиг относительно возмущающей силы, вызванной статическим дисбалансом ротора.

Стационарное движение (4) соответствует состоянию равновесия в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ротора  $\Omega$ . Движение такого типа является прямой круговой синхронной прецессией.

По виду поверхности, которую замечает в пространстве ось вращения ротора, можно различить прецессии цилиндрические, конические и гиперболоидальные.

При равных комплексных амплитудах имеет место *цилиндрическая* прецессия. Если фазы  $\psi_j$  равны или отличаются на  $\pi$  при любых радиусах  $R_j$ , то имеет место *коническая прецессия*. При других соотношениях между фазами  $\psi_j$  прецессия будет *гиперболоидальной*, так как поверхность, заматаемая осью ротора, представляет собой однополостный гиперболоид вращения.

В § 1.4 выписана система для определения комплексных амплитуд, которая представляет собой линейную неоднородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 R_1 \exp(i \psi_1) + A_2 R_2 \exp(i \psi_2) &= d_1 \Omega^2, \\ -B_1 R_1 \exp(i \psi_1) + B_2 R_2 \exp(i \psi_2) &= d_2 \Omega^2 \exp(-i \varepsilon), \end{aligned} \quad (5)$$

с коэффициентами  $A_j = Y_j - e_{3-j} X$ ,  $B_j = k e_j Y_j - X$ , и  $X = \Omega^2$ ,  $Y_j = f_j(R_j)/R_j$ .

Рассмотрим определитель системы (5):

$$\Delta = A_1 B_2 + A_2 B_1 \quad (6)$$

и поверхность  $\Delta = 0$  в пространстве  $\{X, Y_1, Y_2\}$  ( $X \in R^+$ ,  $Y_1 \in R^+$ ,  $Y_2 \in R^+$ ), которую можно рассматривать как недостижимую для прямых синхронных прецессий полностью неуравновешенного ротора, т.е. резонансную поверхность. Назовем множество  $\Delta = 0$  множеством *нелинейных резонансов*. В пространстве переменных  $\{X, Y_1, Y_2\}$  поверхность  $\Delta = 0$  представляет собой гиперболический конус с вершиной в начале координат

$$(Y_1 - e_2 X)(k e_2 Y_2 - X) + (Y_2 - e_1 X)(k e_1 Y_1 - X) = 0. \quad (7)$$

Гиперболы в сечении конуса плоскостью  $X = \text{const}$  имеют асимптоты

$$Y_j = \frac{1 + e_{3-j}^2 k}{k} X. \quad (8)$$

Для динамически вытянутого ротора ( $k > 0$ ) и для динамически сжатого, но с большим значением  $|k| > \max(1/e_1^2, 1/e_2^2)$ , гиперболический конус состоит из двух частей; для динамически сжатого, но со сравнительно небольшими  $|k|$ , множество нелинейных резонансов состоит из одной части. Большие значения  $|k|$  для ротора типа "диск" соответствуют тонкому диску, который уже не может рассматриваться как твердое тело, а должен рассматриваться как пластина.

Гиперболоидальную прецессию можно рассматривать как геометрическую сумму цилиндрической и конической прецессий. Вблизи одной из частей множества нелинейных резонансов "резонирует" цилиндрическая составляющая прямой синхронной прецессии, т.е. большие значения радиусов  $R_j$  получаются за счет большого радиуса орбиты центра тяжести. Вблизи другой части "резонирует" коническая составляющая, т.е. большие значения  $R_j$  получаются за счет большого наклона оси вращения ротора.

В § 1.5 подтверждается, что жесткий ротор с четырьмя степенями свободы обладает свойством самоцентрирования при больших угловых скоростях вращения

и определяются параметры самоцентрирования. Систему (5) можно разрешить относительно  $\exp(i\psi_j)$ . Свойство  $|\exp(i\psi_j)| = 1$  позволяет установить, что существует самоцентрирование ротора и получить предельные значения радиусов  $R_{j\infty}$  и фазовых сдвигов  $\psi_{j\infty}$ :

$$R_{j\infty} = \sqrt{d_1^2 + (e_j d_2)^2 + (-1)^j 2e_j d_1 d_2 \cos \varepsilon}, \quad \tan \psi_{j\infty} = \frac{(-1)^{j+1} e_j d_2 \sin \varepsilon}{d_1 + (-1)^j e_j d_2 \cos \varepsilon}. \quad (9)$$

Из формул (9) видно, что самоцентрирование ротора определяется только конструкцией ротора, именно, положением центра масс (величины  $e_j$ ) и параметрами дисбаланса  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $\varepsilon$ .

Используя свойство  $|\exp(i\psi_j)| = 1$ , можно разделить переменные  $Y_j$  и  $\psi_j$  и получить уравнения  $V_1(X, Y_1, Y_2) = 0$ ,  $V_2(X, Y_1, Y_2) = 0$  для определения величин  $Y_j$  как функций  $X$ , а затем определить фазы  $\psi_j$  и установить характер стационарного движения. Однако в общем случае получить решение полученных уравнений в аналитической форме невозможно.

В §§ 1.6, 1.7 рассматривается ротор, центрально укрепленный в одинаковых опорах. Тогда  $e_1 = e_2 = 1/2$ , и нелинейные характеристики опор заданы одной функцией  $f$ . Показано, что при  $\cos \varepsilon = 0$  возможно существование симметричных гиперболоидальных прецессий, когда  $R_1 = R_2 = R$  (или  $Y_1 = Y_2 = Y$ ), т.е. решений, локализованных на биссектральной плоскости  $\{Y_1 = Y_2\}$  пространства  $\{Y_1, Y_2, X\}$ . При этом множество нелинейных резонансов  $\Delta = 0$  вырождается в пару прямых  $AB = 0$  на плоскости  $\{X, Y\}$ .

Для двух видов нелинейных характеристик опор — типа Герца и типа Дурффинга построены амплитудно-частотные характеристики цилиндрической прецессии для динамически вытянутого и динамически сжатого ротора (см. рис. 1 и 2). Проведено исследование устойчивости по линейному приближению во всем диапазоне угловых скоростей.

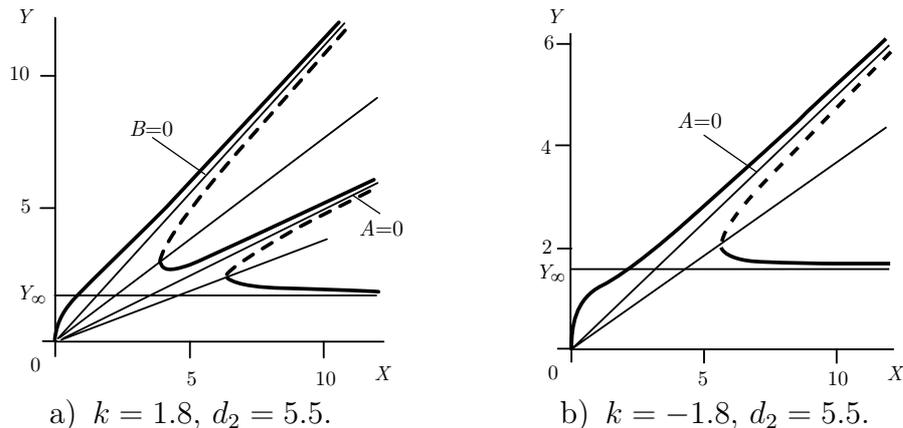
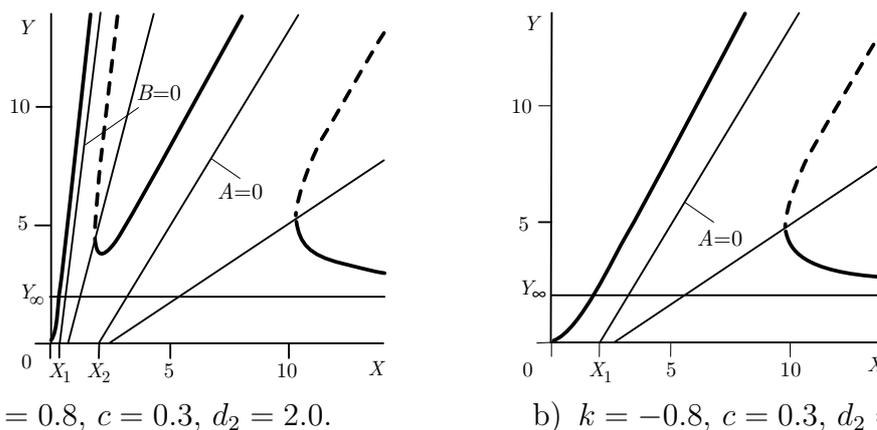


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики цилиндрической прецессии для нелинейных опор типа Герца.

На рис. 1 и 2 жирной линией показаны амплитудно-частотные характеристики для динамически вытянутого (а) и динамически сжатого (б) ротора, причем штриховой линией указаны неустойчивые режимы. Тонкой линией показаны границы устойчивости, включающие нелинейные резонансы  $A = 0$ ,  $B = 0$ , а также предельные значения  $Y = Y_\infty$  в режиме самоцентрирования. Для нелинейных опор типа Дуффинга значения  $X_1, X_2$  соответствуют критическим угловым скоростям ротора в линейном случае.



а)  $k = 0.8, c = 0.3, d_2 = 2.0$ .  
 б)  $k = -0.8, c = 0.3, d_2 = 2.0$ .  
 Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики цилиндрической прецессии для нелинейных опор типа Дуффинга.

Границы неустойчивости получены из условия обращения в нуль свободного члена полинома Гурвица. Для неустойчивых участков амплитудно-частотных характеристик имеется по крайней мере один корень с положительной вещественной частью. Для остальных участков возможная степень неустойчивости при действии только линейных сил и моментов четная. По теореме Томсона — Тета — Четаева добавление гироскопических сил может стабилизировать неустойчивость. Условие гироскопической стабилизации состоит в том, что все корни характеристического полинома относительно  $p^2$  (полинома четвертой степени) должны быть вещественными отрицательными. Выполнение этого условия достаточно легко проверяется численно для конкретного значения частоты вращения при фиксированных параметрах. Для параметров, указанных на рис. 1 и 2, и значений угловой скорости ротора, выбранных случайным образом, проверка подтвердила, что имеет место гироскопическая стабилизация в линейном приближении.

В § 1.8 изучается влияние внешнего трения со стороны опор, окружающей среды или специальных демпферов на вращение полностью неуравновешенного ротора. Допускается, что суммарное действие этих сил можно представить в виде сил, пропорциональных абсолютной скорости шипов:  $\mathbf{R}_j^{(e)} = -\tilde{\mu}_e \dot{\mathbf{S}}_j$ . Показано, что силы сопротивления не влияют на параметры самоцентрирования ротора на больших угловых скоростях, которые зависят только от дисбаланса ротора. Установлено, что диссипативные силы разрушают симметрию гиперболоидальной прецессии. В

случае нецентрально укрепленного ротора или для произвольных значений фазового сдвига динамического дисбаланса  $\varepsilon$  возможно только численное решение задачи. Приведены результаты численного эксперимента.

Известно, что для статически неуравновешенного ротора с двумя степенями свободы, укрепленного в нелинейных опорах типа Дуффинга, амплитудно-частотная характеристика пересекает нелинейный резонанс (скелетную кривую) только при достаточно больших силах сопротивления (см. монографию Genta "Vibration of structure and machines: practical aspects", 1999). Для роторов с четырьмя степенями свободы, испытывающих влияние трения, имеет место аналогичная ситуация. Получены оценки для коэффициента внешнего трения, при котором амплитуды имеют конечные значения:

$$\mu_e > \mu_e^* = \max \left( \sqrt{\frac{c}{8}}, d_2 \sqrt{\frac{c}{2k}} \right).$$

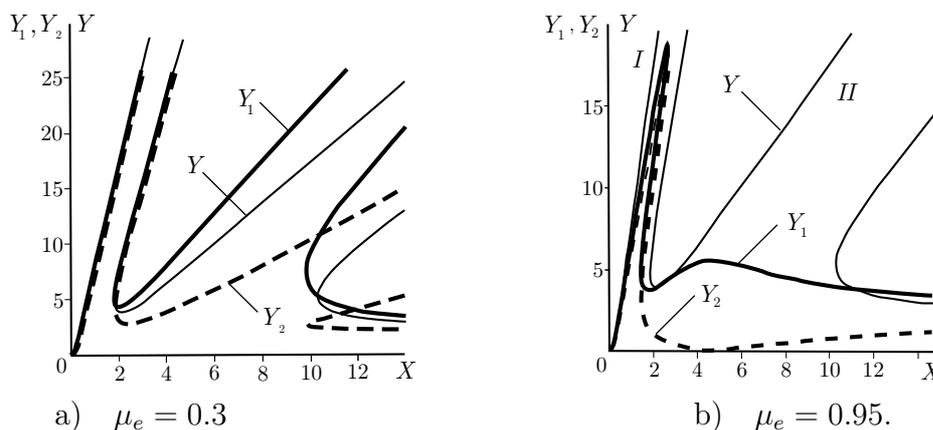


Рис. 3. Параметры:  $k = 0.8$ ,  $d_2 = 2$ ,  $c = 0.3$ ,  $\varepsilon = \pi/2$ .

На рис. 3 приведены амплитудные кривые  $Y_1 = Y_1(X)$  и  $Y_2 = Y_2(X)$  для ротора, центрально укрепленного в одинаковых опорах, при различных силах сопротивления. Для данных параметров критическое значение  $\mu_e^* = 0.866$ . Для сравнения тонкой сплошной линией показана зависимость  $Y = Y(X)$  для симметричной гиперболической прецессии при отсутствии сопротивления  $\mu_e = 0$ .

**Вторая глава** посвящена изучению стационарных движений статически несбалансированного ротора при учете сил внешнего и внутреннего трения. В §§ 2.1 — 2.3 обсуждается модель сил трения, принятая в диссертации, приводятся уравнения движения ротора, система алгебраических уравнений для определения комплексных амплитуд прямой круговой синхронной прецессии и определяются параметры самоцентрирования ротора.

Еще в 20-х годах прошлого века Кимбалл обратил внимание на то, что при исследовании устойчивости вращающихся валов следует различать две группы сил трения. К первой группе принадлежат силы, возникающие при контакте вращающегося вала с неподвижными частями, а также силы трения об окружающую

среду, если ее можно принять за неподвижную, или силы сопротивления со стороны специальных демпферов. Эти силы получили название сил внешнего трения. Ко второй группе относятся силы трения, возникающие во вращающихся частях вала и получившие название внутреннего трения. Подробное описание природы сил внутреннего трения для вращающихся валов дано В.В. Болотиним. Для гибких вращающихся валов это, в первую очередь, силы трения вследствие гистерезиса в материале вала. Похожие силы обнаруживаются в случае роторов, несущих ферромагнитный сердечник, а также роторов, содержащих жидкость со свободной поверхностью. Для жесткого ротора внутреннее трение обусловлено наличием трущихся частей в его конструкции, например, это может быть сила трения между валом и диском, плотно на него насаженным. В диссертации принимается модель линейно-вязкого внешнего и внутреннего трения. Силы внешнего трения пропорциональны абсолютной скорости шипов ротора, а силы внутреннего трения пропорциональны относительной скорости шипов. В безразмерном виде эти силы запишутся следующим образом:  $\mathbf{R}_j^{(e)} = -\mu_e \dot{\mathbf{s}}_j$ ,  $\mathbf{R}_j^{(i)} = -\mu_i (\dot{\mathbf{s}}_j - i \Omega \mathbf{s}_j)$ .

С учетом сил трения и в силу предположений о дисбалансе ротора ( $e \neq 0, \delta = 0$ ) уравнения движения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} \left( e_{3-j} \ddot{s}_j + (\mu_e + \mu_i) \dot{s}_j - i \mu_i \Omega s_j + f_j(|s_j|) \frac{s_j}{|s_j|} \right) &= d_1 \Omega^2 \exp(i \Omega \tau), \\ \sum_{j=1,2} (-1)^j \left( \ddot{s}_j + (k l e_j (\mu_e + \mu_i) - i \Omega \lambda) \dot{s}_j - i k l e_j \mu_i \Omega s_j + k l e_j f_j(|s_j|) \frac{s_j}{|s_j|} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Эта система допускает точное решение (4), а система алгебраических уравнений относительно комплексных амплитуд не зависит от коэффициента внутреннего трения и имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} \left( \frac{f_j(R_j)}{R_j} - e_{3-j} \Omega^2 + i \mu_e \Omega \right) R_j \exp(i \psi_j) &= d_1 \Omega^2, \\ \sum_{j=1,2} (-1)^j \left( k e_j \frac{f_j(R_j)}{R_j} - \Omega^2 + i e_j k \mu_e \Omega \right) R_j \exp(i \psi_j) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Предельные значения радиусов орбит шипов и фаз, равны:

$$R_{1\infty} = R_{2\infty} = d_1, \quad \tan \psi_{1\infty} = \tan \psi_{2\infty} = 0. \quad (12)$$

Отсюда следует, что предельное вращение, которое ротор совершает в режиме самоцентрирования, соответствует цилиндрической прецессии.

В § 2.3 изучаются цилиндрические прецессии в подшипниках с нелинейной характеристикой Герца. Рассматривается ротор, укрепленный в одинаковых опорах, тогда безразмерные реакции опор равны  $f(s_j) = |s_j|^{1/2} s_j$ . Центр масс находится посередине между опорами, т.е.  $e_1 = e_2 = 1/2$ . В качестве характерного размера выберем эксцентриситет  $h = e$ , тогда  $d_1 = 1$ . Удобно сделать замену  $Y_j = \sqrt{R_j}$ .

Разрешив систему (11) относительно  $\exp(i\psi_j)$ , можно получить уравнение  $|\exp(i(\psi_1 - \psi_2))| = 1$ , которое задает поверхность локализации решений, соответствующих состояниям относительного равновесия. В развернутом виде это уравнение принимает вид:

$$(Y_1 - Y_2)[L_2 L_3 + \mu_e^2 k^2 X (Y_1 + Y_2)(Y_1^2 + Y_2^2)] = 0, \quad (13)$$

$$L_2 = k(Y_1^2 + Y_1 Y_2 + Y_2^2) - 2X(Y_1 + Y_2), \quad L_3 = k(Y_1^3 + Y_2^3) - 2X(Y_1^2 + Y_2^2).$$

Поверхность (13) представляет собой плоскость  $Y_1 = Y_2$  и конус с вершиной в начале координат ( $\mu_e = 0$ ) или чашу двухполостного гиперboloида ( $\mu_e \neq 0$ ), который асимптотически приближается к конусу при  $\mu_e \rightarrow 0$ . Сечение гиперboloида плоскостью  $\{Y, X\}$ , где  $Y = Y_1 = Y_2$ , есть гипербола

$$\left(\frac{k}{2}Y - X\right) \left(\frac{3}{4}kY - X\right) + \frac{1}{4}k^2\mu_e^2 X = 0. \quad (14)$$

При  $\mu_e = 0$  гипербола вырождается в пару своих асимптот, которые представляют сечение конуса плоскостью  $\{Y, X\}$ .

Среди решений (4) можно выделить решения  $s_1 = s_2$ , соответствующие цилиндрической прецессии, и решения  $s_1 \neq s_2$ . Первые локализованы на плоскости  $Y_1 = Y_2$ , а решения  $s_1 \neq s_2$ , локализованы на поверхности гиперboloида (13).

Рассмотрим цилиндрические прецессии  $s_1 = s_2$ , при этом второе уравнение в (10) удовлетворяется тождественно. Обозначим  $Y_1 = Y_2 = Y$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ . Тогда величины  $A_1 = A_2 = A$ ,  $B_1 = B_2 = B$  и  $A = Y - X/2$ ,  $B = (kY)/2 - X$ .

Множество нелинейных резонансов  $\Delta = 0$  вырождается в пару пересекающихся прямых  $AB = 0$ . Показано, что вблизи нелинейных резонансов цилиндрическая прецессия теряет устойчивость. Из условия  $|\exp(i\psi)| = 1$  получим аналитическое выражение амплитудно-частотной характеристик:

$$Y^2 \sqrt{A^2 + \mu_e^2 X} = X/2. \quad (15)$$

Для исследования устойчивости цилиндрической прецессии применяется стандартный линейный анализ. В этом случае систему линейного приближения можно записать в виде двух независимых подсистем, поэтому характеристический полином восьмого порядка может быть представлен в виде произведения двух полиномов четвертого порядка, исследование которых удалось провести в аналитическом виде. В работе показано, что без учета внутреннего трения условия критерия Рауса – Гурвица нарушаются только в результате перехода через нулевые корни характеристического определителя. Условия перехода через нулевые корни имеют вид

$$a_4 = 4(AC + \mu_e^2 X) = 0, \quad b_4 = l^2(BD + \frac{1}{4}k^2\mu_e^2 X) = 0, \quad (16)$$

где  $a_4, b_4$  — свободные члены характеристических полиномов, а величины  $C = \frac{1}{2}(3Y - X)$ ,  $D = \frac{3}{4}kY - X$ . Условия (16) не зависят от коэффициента внутреннего трения  $\mu_i$ , как и АЧХ (15). Из этих условий видно, что неустойчивость

возникает вблизи нелинейных резонансов  $A = 0$ ,  $B = 0$ . Каждое из условий (16) на плоскости  $\{X, Y\}$  представляет собой гиперболу, а каждая резонансная линия – одна из асимптот этих гипербол. Второе условие (16) перехода через нулевой корень и условие (14) ветвления интегрального множества совпадают.

При наличии внутреннего трения в закритической области возникает неустойчивость, связанная с переходом параметра  $X$  через значение, при котором характеристический полином имеет чисто мнимые корни. Для выбранных значений параметров граница перехода через чисто мнимые корни при  $\mu_i \neq 0$  имеет вид

$$\Delta_3(P_1) = \mu_s^2 Y^2 + 40 \mu_s^2 (\mu_s^2 + X) Y - 16 \mu_i^2 (\mu_s^2 + X) X = 0, \quad \mu_s = \mu_e + \mu_i. \quad (17)$$

Эта кривая – часть ветви гиперболы, которая с большой точностью аппроксимируется своей асимптотой. В данном случае асимптота имеет вид  $Y = 0.147 X$ .

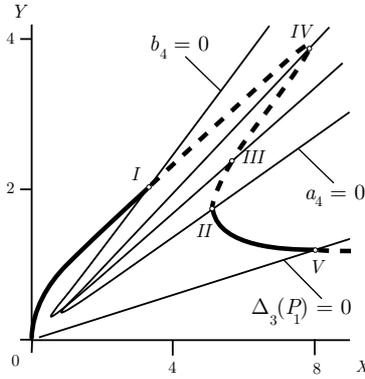


Рис. 4. Устойчивые и неустойчивые режимы цилиндрической прецессии.

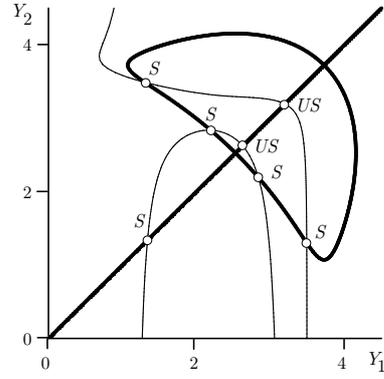


Рис. 5. Бифуркации цилиндрической прецессии ( $X_{III} < X = 6.0 < X_{IV}$ ).

На рис. 4 представлена амплитудно-частотная характеристика для следующих значений параметров:  $\lambda = 0.7$ ,  $k = 3.2$ ,  $\mu_e = 0.09$ ,  $\mu_i = 0.14$ , выделены устойчивые (сплошная жирная линия) и неустойчивые (пунктирная линия) режимы, а также тонкой сплошной линией показаны  $a_4 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\Delta_3(P_1) = 0$ .

Прямой синхронной прецессии ротора соответствует состояние равновесия в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ротора, которое также зависит от угловой скорости. Возникает задача изучения однопараметрической бифуркации состояния относительного равновесия. Бифуркации в однопараметрической задаче могут иметь "жесткий" и "мягкий" характер. В первом случае потеря устойчивости происходит за счет слияния устойчивого и неустойчивого состояний равновесия. Такая бифуркация носит "жесткий" характер, и действительно, в точках, где  $a_4 = 0$  (точки II, IV на рис. 4) имеет место классический "скачок" амплитуды. При этом тип вращения – цилиндрическая прецессия – сохраняется. Во втором случае "мягкой" бифуркации потеря устойчивости сопровождается появлением двух новых устойчивых состояний равновесия, локализованных на поверхности гиперboloида (13). Это точки I, III на рис. 4, где  $b_4 = 0$ . Для конкретной

частоты  $X$  параметры новых состояний равновесия находятся как точки пересечения кривой  $|\exp(i(\psi_1 - \psi_2))| = 1$  и кривой  $|\exp(i\psi_1)| = 1$  (или  $|\exp(i\psi_2)| = 1$ ). На рис. 5 показано число возможных режимов прецессионного движения как цилиндрического, так и гиперболоидального типов для частоты, соответствующей значению  $X \in (X_{III}, X_{IV})$ . Жирной линией показана кривая  $|\exp(i(\psi_1 - \psi_2))| = 1$ , тонкой —  $|\exp(i\psi_1)| = 1$ . Устойчивые состояния равновесия отмечены знаком  $S$ , неустойчивые —  $US$ .

При увеличении параметра  $X$  и переходе через значение, при котором характеристический полином имеет чисто мнимые корни, имеет место бифуркация Андронова – Хопфа, которая также может "жесткого" и "мягкого" типа. Непосредственное интегрирование системы (10) показывает, что для динамически вытянутого ротора имеет место "мягкое" возбуждение автоколебаний. Граница возбуждения автоколебаний может быть найдена как решение системы уравнений

$$Y^2 \sqrt{A(X, Y) + \mu_e^2 X} = X/2, \quad \Delta_3(P_1) = 0. \quad (18)$$

Результаты численного решения системы (18) показывают, что граница  $X_V$  практически зависит от отношения  $\chi = \mu_i/\mu_e$ , и с уменьшением  $\chi$  значение  $X_V \rightarrow \infty$ . Отсюда можно сделать вывод, что даже небольшое увеличение внешнего трения значительно повышает порог неустойчивости.

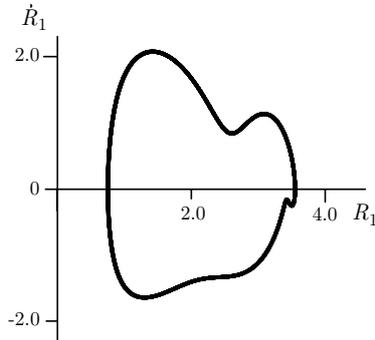


Рис. 6. Предельный цикл при  $X = 8.9$ .

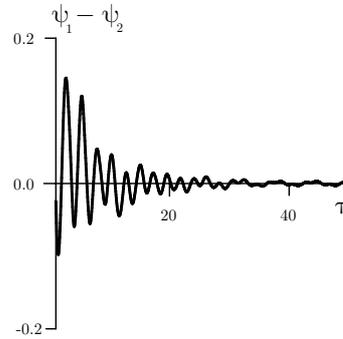


Рис. 7. Разность фаз.

Было проведено численное интегрирование системы (10) для достаточно широкого диапазона угловых скоростей, и для всех значений  $X > X_V$  были построены предельные циклы Андронова – Хопфа (рис. 6), параметризующие цилиндрическую прецессию, так как разность фаз стремится к нулю (рис. 7). Было обнаружено, что средняя амплитуда прецессии возрастает с ростом  $X$ .

Был проведен спектральный анализ и с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье построен частотный спектр, который показан на рис. 8. Пики наблюдаются на 38, 75, 113, 150 и 187 гармониках. Время наблюдения равнялось 100 оборотам ротора в установившемся режиме, число точек отсчета равнялось 32 за время одного оборота. Кроме того, с использованием алгоритма Бенеттина было проведено приближенное вычисление спектра ляпуновских показателей, которое

показано на рис. 9. В последней точке вычислений спектр принимает следующие значения:

$$\Lambda = \{0.0016, -0.0012, -0.0429, -0.0527, -0.0847, -0.0852, -0.4288, -0.4392\}.$$

Можно сказать, что сигнатура спектра имеет вид  $(0, 0, -, -, -, -, -)$ , характерный для квазипериодического аттрактора.

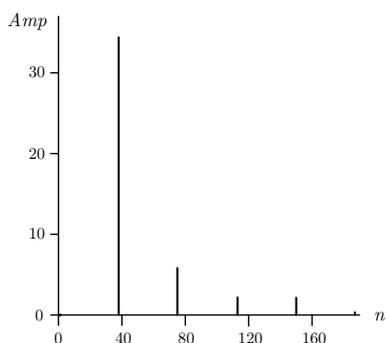


Рис. 8. Частотный спектр при  $X = 8.9$ .

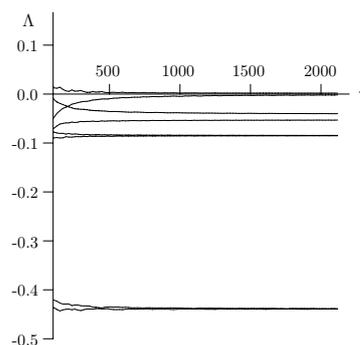


Рис. 9. Приближение спектра ляпуновских показателей.

В процессе численного исследования вращения ротора в закритической области обнаружилось, что автоколебания цилиндрического типа проявили чувствительность к изменению начальных данных в узком диапазоне угловых скоростей вблизи границы возбуждения автоколебаний. Для выбранных параметров этот диапазон распространяется от  $X = 8.051$  до  $X = 9.051$ . Если начальное положение оси ротора выбрать параллельным линии подшипников, т. е.  $R_1(0) = R_2(0)$ ,  $\psi_1(0) = \psi_2(0)$  и соответствующие производные также равны, то фазовая траектория будет предельным циклом Андронова – Хопфа (рис. 6).

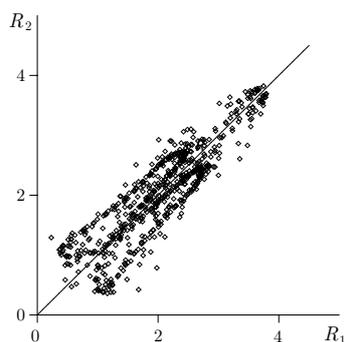


Рис. 10. Отображение Пуанкаре на пл.  $\{R_1, R_2\}$  ( $\tau = 0[\text{mod}(2\pi/\Omega)]$ ).

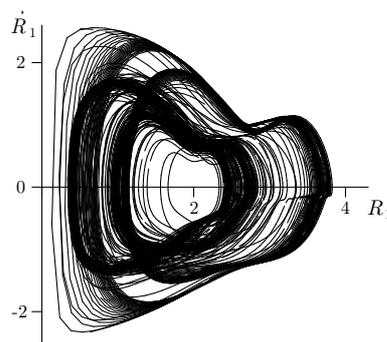


Рис. 11. Фазовая траектория за время, равное 700 оборотам ротора.

На рис. 10 и 11 представлены результаты численного эксперимента для тех же значений параметров и угловой скорости, но при этом начальные условия были

выбраны случайным образом и оказались такими:  $R_1(0) = 1.03$ ,  $R_2(0) = 2.71$ ,  $\psi_1(0) = 1.28$ , значения остальных переменных равны нулю. Предельный цикл теряет свою устойчивость. Вращение ротора становится хаотическим. Типичная реализация процесса при этом выглядит следующим образом. После нескольких начальных оборотов, близких к предельному циклу Хопфа, происходит удвоение периода и появляется фазовая траектория с двумя петлями, охватывающими предельный цикл Хопфа изнутри и снаружи. Затем вращение соскальзывает в хаос. Однако через некоторое время происходит синхронизация, которая просматривается на рис. 10, и устанавливается новый предельный цикл с двойной петлей. При этом происходит изменение типа прецессионного движения.

Был исследован нестационарный переход через резонансную область при линейном изменении угловой скорости  $\Omega = \Omega_0 + \nu \tau$ ,  $\varphi(\tau) = \Omega_0 \tau + \nu \tau^2/2$ . С учетом сил внешнего и внутреннего сопротивления безразмерные уравнения движения ротора будут иметь вид:

$$\sum_{j=1,2} (e_{3-j} \ddot{s}_j + (\mu_e + \mu_i) \dot{s}_j - i\mu_i \Omega s_j) + \nu_j |s_j|^{1/2} s_j = (\Omega^2 - i\nu) \exp(i\varphi(\tau)),$$

$$\sum_{j=1,2} (-1)^j (\ddot{s}_j + (kle_j(\mu_e + \mu_i) - i\Omega\lambda) \dot{s}_j - i\Omega(kle_j\mu_i + \nu\lambda) s_j + kle_j\nu_j |s_j|^{1/2} s_j) = 0.$$
(19)

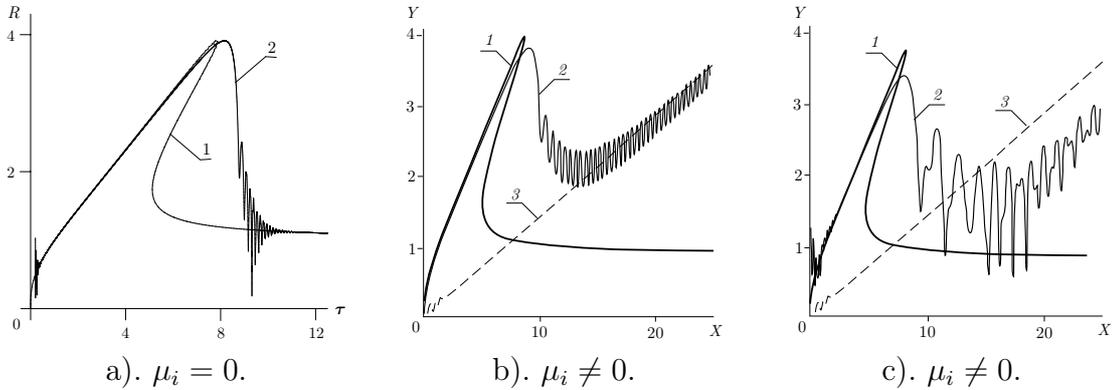


Рис. 12. Нестационарный переход через резонансную область.

На рис. 12 показаны результаты численного интегрирования системы (19) при различных значениях коэффициента внутреннего трения и различных начальных данных. Принятые обозначения: 1 — АЧХ цилиндрической прецессии; 2 — нестационарные колебания; 3 — кривая  $\Delta_3(P_1) = 0$ . На рис. 12, а представлен случай отсутствия внутреннего трения, когда режимы самоцентрирования ротора являются асимптотически устойчивыми. На рис. 12, б представлен случай, которому в стационарном движении соответствует предельный цикл, и, наконец, на рис. 12, с

представлен случай, которому в стационарном движении соответствуют хаотические колебания. Видна существенная роль внутреннего трения в возникновении в закритической области интенсивных колебаний нарастающей амплитуды.

В § 2.4 изучаются цилиндрические прецессии в подшипниках с нелинейной характеристикой Дуффинга. Были получены результаты, аналогичные предыдущим. Кроме того, было проведено приближенное определение предельного цикла по методу, предложенному Тондлом для ротора с двумя степенями свободы, совершающему плоско-параллельное движение. Автоколебания ищутся в виде:

$$s_j = r_j \exp(i(\omega \tau + \vartheta)) + R_j \exp(i(\Omega \tau + \varphi_j)), \quad (20)$$

где  $\omega, r_j, R_j, \varphi_j, \vartheta$  – неизвестные величины. Представление автоколебаний в таком виде позволяет выделить в решении с неизвестным периодом составляющую, имеющую период внешней возмущающей силы. После подстановки (20) в (10) и усреднения по периоду  $2\pi/(\Omega - \omega)$  получим приближенные уравнения относительно неизвестных  $r_j, R_j, \varphi_j, \omega$ , которые не будут зависеть от  $\vartheta$ . Полученные уравнения имеют решения  $r_1 = r_2 = r$ ,  $R_1 = R_2 = R$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ . Для определения неизвестных  $\omega, r, R, \varphi$  получим следующие приближенные уравнения

$$\begin{aligned} \mu_s \omega - \mu_i \Omega &= 0, \\ c(r^2 + 2R^2) + 1 - \omega^2/2 &= 0, \\ R(2c(2r^2 + R^2) + 2 - \Omega^2) \sin(\varphi) + 2\mu_e R \Omega \cos(\varphi) &= 0, \\ R(2c(2r^2 + R^2) + 2 - \Omega^2) \cos(\varphi) - 2\mu_e R \Omega \sin(\varphi) &= \Omega^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Из первого уравнения в (21) находим значение  $\omega$ , что позволит приближенно определить период автоколебаний  $T_{av}$  через время одного оборота ротора  $T_r$ :

$$\omega = \frac{\mu_i}{\mu_s} \Omega, \quad T_{av} \approx \frac{\mu_s}{\mu_e} \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\mu_s}{\mu_e} T_r, \quad \mu_s = \mu_e + \mu_i. \quad (22)$$

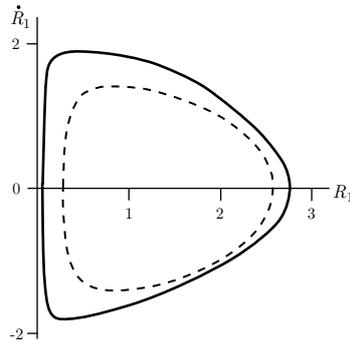


Рис. 13. Предельный цикл Андронова — Хопфа, точное и приближенное решение.

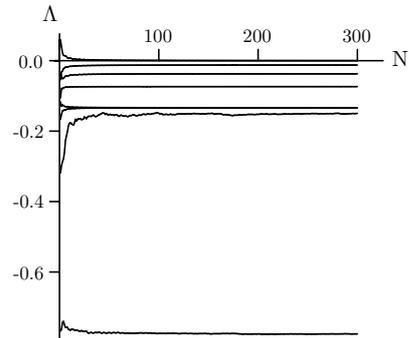


Рис. 14. Приближенное построение спектра ляпуновских показателей.

На рис. 13 для значения  $X = 8.2$  и  $\mu_e = 0.21$ ,  $\mu_i = 0.28$  жирной сплошной

линией показан предельный цикл на плоскости  $\{R_1, \dot{R}_1\}$  фазового пространства  $\{R_1, \dot{R}_1, R_2, \dot{R}_2, \psi_1 - \psi_2, \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2\}$ . Этот график соответствует 100 оборотам ротора в установившемся режиме (от 400 до 500 оборотов). Периодическое движение, параметризуемое этим предельным циклом, является цилиндрической прецессией, так как при этом  $\psi_1 - \psi_2 = 0$ . Штриховой линией показан предельный цикл, полученный приближенным способом. Наблюдается достаточно хорошее совпадение максимальных значений амплитуд, что наиболее важно. Частота  $\omega$  и период автоколебаний равны  $\omega \doteq 1.63$ ,  $T_{av} \doteq 5.12$ . Погрешность в определении периода автоколебаний составляет примерно 2.6%. С ростом угловой скорости точность приближения падает.

Уравнения (21) позволяют получить оценку для границы возбуждения автоколебаний. Подставим полученное значение  $\omega$  во второе уравнение системы (21), введем величину  $\chi = \mu_i/\mu_e$  и получим выражение для  $\Omega$ :

$$\Omega = \left(1 + \frac{1}{\chi}\right) \sqrt{2} \sqrt{1 + c(r^2 + 2R^2)}. \quad (23)$$

Если в последнем выражении справа устремить  $r$  к нулю, то получим приближенное выражение для границы возбуждения автоколебаний

$$\Omega = \left(1 + \frac{1}{\chi}\right) \sqrt{2} \sqrt{1 + 2cR^2}. \quad (24)$$

При  $c = 0$ , т.е. в случае линейно-упругих опор, безразмерная критическая угловая скорость равна  $\omega_{cr} = \sqrt{2}$ , и формула (23) совпадает с хорошо известным результатом Смита (1933 г.) для модели ротора с двумя степенями свободы.

На рис. 14 представлены результаты вычисления спектра ляпуновских показателей полученного предельного цикла на основе алгоритма Бенеттина. По оси абсцисс откладывается число итераций. В качестве начальной точки взяты значения переменных в момент времени, равный 200 оборотам ротора, шаг интегрирования равнялся 10 оборотам. Спектр в последней точке вычислений равен:

$$\Lambda = \{-0.0003, -0.0124, -0.0373, -0.0735, -0.1335, -0.1336, -0.1496, -0.7758\}.$$

Как видно, сигнатура спектра имеет вид  $(0, -, -, -, -, -, -, -)$ , характерный для предельного цикла.

§ 2.5 посвящен изучению влияния зазора в подшипниках крепления на цилиндрические прецессии неуравновешенного ротора. Была принята модель взаимодействия ротора и опоры, предложенная в работах М. Паскаль (2004 г.). Пусть в подшипниках крепления имеется небольшой зазор (радиальный люфт)  $\rho_0$ . В подшипнике с зазором ротор может совершать вращение как находясь в контакте с подшипником, так и не имея такого контакта, поэтому сила реакции опоры предполагается кусочно-непрерывной и задается в виде

$$P_j = -\tilde{P}_j \frac{S_j}{|S_j|}, \quad \tilde{P}_j = \begin{cases} F_j(|S_j| - \rho_0), & \text{если } |S_j| > \rho_0, \\ 0, & \text{если } |S_j| \leq \rho_0, \end{cases} \quad (25)$$

где  $S_j$  — смещение шипа от равновесного положения.

Как и в предыдущих случаях, учитываются вязко-линейные силы внешнего и внутреннего сопротивления. Полученная система дифференциальных уравнений вращения ротора допускает точное решение, соответствующее прямой круговой синхронной прецессии. Для опор с нелинейными свойствами, задаваемыми формулой Герца, были построены амплитудно-частотные характеристики цилиндрической прецессии и исследована устойчивость во всем диапазоне частот. Получено условие перехода с движения без контакта в опоре на движение с контактом и определено значение угловой скорости  $X_{tr}$ , при котором происходит переход с одной фазы движения на другую. Установлены также параметры самоцентрирования ротора. Влияние зазора самым существенным образом сказывается при малых угловых скоростях ротора. Так, если зазор мал, то диапазон частот, в котором возможно движение без контакта, также мал. Амплитуды прецессий ротора при движении с контактом значительно больше, хотя максимальное значение амплитуды несколько меньше, чем при вращении ротора в подшипнике без зазора. "Срыв" амплитуды происходит при меньших угловых скоростях. Эта же особенность отмечена для гибкого ротора с двумя степенями свободы в работе Паскаль.

**Третья глава** посвящена исследованию стационарных движений динамически несбалансированного ротора. Известно, что динамическая (или моментная) неуравновешенность ротора в отличие от статической не может быть обнаружена в положении равновесия. Динамическая балансировка роторов может быть осуществлена только для определенной фиксированной угловой скорости, как правило, рабочей скорости ротора. При разгоне до рабочего режима и прохождении через резонансную область ротор ведет себя как несбалансированный. В силу этого исследование динамики и устойчивости моментно неуравновешенного ротора во всем диапазоне угловых скоростей имеет самостоятельное теоретическое и практическое значение. Изучение прецессионного движения динамически неуравновешенного ротора проводится по схеме, принятой во второй главе. Исследовано вращение ротора как в опорах с нелинейной характеристикой типа Герца, так и в опорах с нелинейной характеристикой типа Дуффинга.

Рассматривается жесткий динамически неуравновешенный ротор  $\delta \neq 0$ . Статический дисбаланс  $e = 0$ , угол фазового сдвига динамического дисбаланса можно положить равным нулю  $\varepsilon = 0$ . В качестве характерного линейного размера в данном случае удобно выбрать величину  $L\delta$ , т.е.  $h = L\delta$ . Тогда безразмерные параметры дисбаланса будут:  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 1$ . Среди прямых синхронных прецессий удалось выделить симметричные конические, когда центр масс неподвижен, а радиусы орбит шипов равны. Для этих движений были построены амплитудно-частотные характеристики, в линейном приближении исследована устойчивость и изучены различные сценарии потери устойчивости как вблизи нелинейных резонансов, так и в закритической области.

Следует отметить особенности потери устойчивости при больших угловых скоростях ротора. Возникающие автоколебания представляют собой сложение высо-

кочастотных, близких к гармоническим, колебаний центра масс с малой амплитудой около некоторого среднего значения и конических колебаний относительно центра масс с частотой приблизительно в два раза меньшей. Численный эксперимент показал, что с увеличением угловой скорости ротора частота колебаний центра масс растет, а также значительно возрастает среднее значение смещения центра масс и уменьшаются амплитуда колебаний центра масс, коническая раскачка оси ротора относительно центра масс и разность фаз, т.е. по характеру движения автоколебания приближаются к цилиндрической прецессии, причем угловая скорость этой прецессии возрастает. Хаотизация предельных циклов в случае опор с нелинейной характеристикой типа Герца не была обнаружена, но при изменении начальных значений для фазовых сдвигов  $\psi_1(0)$  и  $\psi_2(0)$  проявилось явление, которое Арнольд назвал "затягиванием неустойчивости". Так при  $\psi_1(0) - \psi_2(0) = \pi$ ,  $R_1(0) = R_2(0)$  и остальных нулевых значениях после первых нескольких оборотов ротора устанавливается движение, соответствующее неустойчивому состоянию относительного равновесия, и только по истечении некоторого промежутка времени происходит потеря устойчивости и появляется предельный цикл.

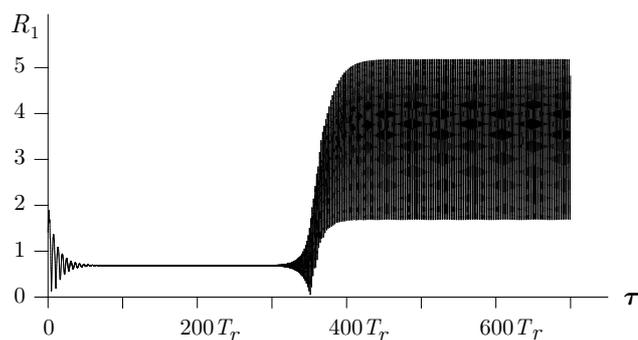


Рис. 15. "Затягивание неустойчивости".

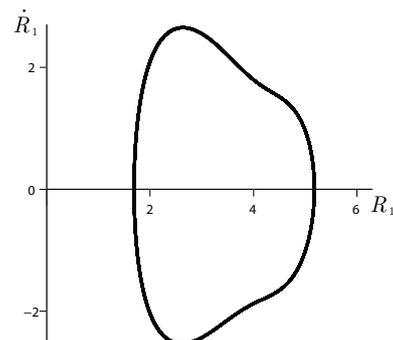


Рис. 16. Предельный цикл.

В случае опор с нелинейной характеристикой типа Дуффинга явление "затягиванием неустойчивости" также наблюдалось. Кроме того, был обнаружен диапазон угловых скоростей, где предельный цикл Андронова — Хопфа терял устойчивость и появлялись квазипериодические колебания, близкие к хаотическим.

В **четвертой главе** изучаются стационарные движения неуравновешенного ротора, который укреплен на гибком валу, установленном в упругие опоры. Приводится описание модели ротора и вывод уравнений движения. Перемещение ротора можно рассматривать в виде суммы его перемещения как твердого тела и смещения за счет упругости вала. Прямые синхронные прецессии классифицируются по виду поверхности, заметаемой в пространстве недеформированной осью вращения ротора. Без учета сил сопротивления исследуются гиперboloидальные прецессии полностью неуравновешенного ротора, установленного в линейно упругих опорах. Получены параметры самоцентрирования ротора и найдены критические частоты. Для конкретных примеров проведено вычисление критических частот и показа-

но влияние упругости опор на их значения. Проведено сравнение с известными результатами для ротора, укрепленного в жестких опорах. Рассмотрены также гиперболоидальные прецессии в нелинейных упругих подшипниках с нелинейностью типа Герца. Для симметричной прецессии построены амплитудно-частотные характеристики, найдены параметры самоцентрирования и исследована устойчивость по линейному приближению как для динамически вытянутого, так и для динамически сжатого ротора.

Все обозначения и предположения, принятые для жесткого ротора, сохраняют свой смысл и в случае упругого вала. Положение ротора можно охарактеризовать с помощью 8 параметров:  $(x, y)$  — декартовы координаты точки  $Q$  (точки крепления ротора к валу);  $(\alpha, \beta)$  — углы, определяющие направление касательной в точке  $Q$  к изогнутой оси вала;  $(x_j, y_j)$  — декартовы координаты точки  $Q_j$ ,  $(j = 1, 2)$ .

Задача рассматривается в геометрически-линейной постановке, поэтому кинетическая энергия ротора с точностью до линейных членов относительно параметров дисбаланса  $e, \delta$  и квадратичных членов относительно малых величин  $\alpha, \beta$ , и их производных  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$  может быть записана в виде (см. монографию Genta "Vibration of structure and machines: practical aspects", 1999):

$$T = \frac{1}{2}M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + e\omega(\dot{y} \cos(\omega t) - \dot{x} \sin(\omega t))) + \frac{1}{2}J_p(\omega^2 - 2\omega\dot{\beta}\alpha) + \frac{1}{2}J_t(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + (J_p - J_t)\delta\omega(\dot{\alpha} \sin(\omega t - \varepsilon) - \dot{\beta} \cos(\omega t - \varepsilon)). \quad (26)$$

Вал предполагается линейно-упругим, так что потенциальная энергия изогнутого вала может быть записана в виде:

$$П_в = \frac{1}{2}c_{11}((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + \frac{1}{2}c_{22}((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2) + c_{12}((x - x_0)(\alpha - \alpha_0) + (y - y_0)(\beta - \beta_0)). \quad (27)$$

Здесь введены обозначения  $C = \{c_{lm}\}$ ,  $(l, m = 1, 2)$  — матрица жесткости упругого вала. Величины  $(x_0, y_0, \alpha_0, \beta_0)$  характеризуют перемещение ротора как твердого тела и могут быть вычислены как функции декартовых координат  $x_j, y_j$  точек  $Q_j$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= e_2 x_1 + e_1 x_2, & y_0 &= e_2 y_1 + e_1 y_2, \\ \alpha_0 &\doteq (x_2 - x_1)/L, & \beta_0 &\doteq (y_2 - y_1)/L. \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть силы внешнего трения задаются диссипативной функцией  $\Phi_1$ , а силы внутреннего трения — диссипативной функцией  $\Phi_2$  (см., например, Гробов В. А. "Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин", 1961):

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\tilde{\mu}_e(\dot{S}^2 + L^2\dot{\gamma}^2), \quad \Phi_2 = \frac{1}{2}\tilde{\mu}_i(|\dot{S} - i\omega S|^2 + L^2|\dot{\gamma} - i\omega\gamma|^2). \quad (29)$$

Система уравнений Лагранжа II-го рода относительно скалярных переменных

включает четыре дифференциальных уравнения и четыре алгебраических уравнения, которые в комплексной форме могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} M\ddot{S} + (\tilde{\mu}_e + \tilde{\mu}_i)\dot{S} - i\omega\tilde{\mu}_i S + c_{11}(S - S_0) + c_{12}(\gamma - \gamma_0) &= M e \omega^2 \exp(i\omega t), \\ J_t \ddot{\gamma} - i J_p \omega \dot{\gamma} + (\tilde{\mu}_e + \tilde{\mu}_i) L^2 \dot{\gamma} - i\omega\tilde{\mu}_i L^2 \gamma + c_{12}(S - S_0) + c_{22}(\gamma - \gamma_0) &= \\ &= (J_t - J_p) \delta \omega^2 \exp(i(\omega t - \varepsilon)), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \left( c_{11} e_2 - \frac{c_{12}}{L} \right) (S - S_0) + \left( c_{12} e_2 - \frac{c_{22}}{L} \right) (\gamma - \gamma_0) &= F_1(|S_1|) \frac{S_1}{|S_1|}, \\ \left( c_{11} e_1 + \frac{c_{12}}{L} \right) (S - S_0) + \left( c_{12} e_1 + \frac{c_{22}}{L} \right) (\gamma - \gamma_0) &= F_2(|S_2|) \frac{S_2}{|S_2|}. \end{aligned} \quad (31)$$

Алгебраические уравнения (31) отражают баланс упругих сил со стороны изогнутого вала и восстанавливающих упругих сил со стороны деформированных опор. Выбрав переменные  $(S_1, S_2)$  в качестве обобщенных координат, можно применить методы, развитые для абсолютно жесткого ротора с четырьмя степенями свободы, укрепленного в упругих нелинейных опорах. Уравнения (31) являются линейными относительно  $(S, \gamma)$ , следовательно, возможно найти точное решение:

$$\begin{aligned} S &= \tilde{a}_1(|S_1|) S_1 + \tilde{a}_2(|S_2|) S_2, & \gamma &= -\tilde{b}_1(|S_1|) \frac{S_1}{L} + \tilde{b}_2(|S_2|) \frac{S_2}{L}; \\ \tilde{a}_j &= e_{3-j} + \varkappa_{1j} \frac{F_j(|S_j|)}{|S_j|}, & \tilde{b}_j &= 1 + \varkappa_{2j} L \frac{F_j(|S_j|)}{|S_j|}; \\ \varkappa_{1j} &= c_{11}^* + (-1)^j c_{12}^* e_j L, & \varkappa_{2j} &= c_{22}^* e_j L + (-1)^j c_{12}^*, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $C^* = \{c_{lm}^*\}$  — матрица податливости. Компоненты этой матрицы  $c_{lm}^*$  зависят от способа крепления вала. Для различных видов опор эти функции можно найти во многих монографиях.

Подставляя решение (32) в уравнения (30), получим дифференциальные уравнения относительно неизвестных  $S_1, S_2$ . После перехода к безразмерному времени и безразмерным переменным эти уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} \left( \mathcal{M}_\tau(a_j(|s_j|)s_j) + f_j(|s_j|) \frac{s_j}{|s_j|} \right) &= d_1 \Omega^2 \exp(i\Omega\tau), \\ \sum_{j=1,2} (-1)^j \left( \mathcal{J}_\tau(b_j(|s_j|)s_j) + k l e_j f_j(|s_j|) \frac{s_j}{|s_j|} \right) &= l d_2 \Omega^2 \exp(i(\Omega\tau - \varepsilon)), \end{aligned} \quad (33)$$

где введены операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\tau(*) &= \frac{d^2}{d\tau^2} (*) + (\mu_e + \mu_i) \frac{d}{d\tau} (*) - i\Omega\mu_i (*), \\ \mathcal{J}_\tau(*) &= \frac{d^2}{d\tau^2} (*) + (-i\Omega\lambda + k l (\mu_e + \mu_i)) \frac{d}{d\tau} (*) - i\Omega k l \mu_i (*), \end{aligned} \quad (34)$$

и использованы обозначения

$$\begin{aligned} a_j(|s_j|) &= e_{3-j} + \sigma_{1j} \frac{f_j(|s_j|)}{|s_j|}, & \sigma_{1j} &= \varkappa_{1j} M \omega_0^2, \\ b_j(|s_j|) &= 1 + \sigma_{2j} \frac{f_j(|s_j|)}{|s_j|}, & \sigma_{2j} &= \varkappa_{2j} LM \omega_0^2, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (35)$$

Уравнения (33) допускают точное решение вида (4).

В § 4.2 изучаются гиперболоидальные прецессии неуравновешенного ротора в упругих линейных опорах без учета сил сопротивления. Резонансное множество  $\Delta = 0$  в случае линейных упругих опор есть уравнение для определения критических угловых скоростей. Если ротор представляет собой динамически вытянутое тело (типа "сигара"), то уравнение  $\Delta = 0$  имеет два вещественных положительных корня относительно  $\Omega^2$ , т.е. существуют две критические угловые скорости. Если же ротор представляет динамически сжатое тело (типа "диск"), то существует только одна критическая скорость. Это известный из литературы и практики факт (см. монографии Диментберга, Грובה, Genta). Было проведены расчеты критических угловых скоростей с учетом упругости опор. Отмечено существенное снижение второй критической скорости при консольном закреплении ротора.

В § 4.3 изучаются симметричные гиперболоидальные прецессии полностью неуравновешенного ротора в упругих нелинейных опорах с нелинейной характеристикой типа Герца. Показано, что в случае динамически вытянутого ротора множество нелинейных резонансов вырождается в  $AB = 0$ . На плоскости  $\{X, Y\}$  каждая кривая

$$A = Y - a(Y)X = 0, \quad B = \frac{k}{2}Y - 2a(Y), \quad X = 0, \quad a(Y) = \frac{1}{2} + \sigma Y, \quad \sigma = \frac{cL^3\sqrt{e}}{48 E J} \quad (36)$$

представляет ветвь гиперболы с вертикальной асимптотой  $X = 1/\sigma$  для  $A = 0$  и  $X = k/(4\sigma)$  для  $B = 0$ . Амплитудно-частотная характеристика симметричной гиперболоидальной прецессии в этом случае имеет вид:

$$Y^2 = \frac{X}{2} \sqrt{\frac{1}{A^2} + \frac{d^2}{B^2}}, \quad (37)$$

а предельное значение  $Y_\infty$  в режиме самоцентрирования ротора при бесконечно больших угловых скоростях равно положительному корню кубического уравнения

$$4\sigma Y_\infty^3 + 2Y_\infty^2 - \sqrt{4 + d^2} = 0, \quad (38)$$

которое всегда имеет ровно один положительный корень. Для динамически сжатого ротора, как и в случае жесткого ротора, существует только один нелинейный резонанс  $A = 0$ . Амплитудно-частотные характеристики симметричной гиперболоидальной прецессии изображены на рис. 17, 18.

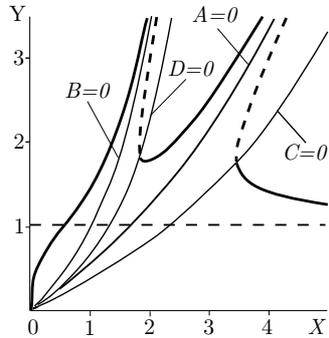


Рис. 17.  $k = 2.8$ ,  $d = 2.0$ ,  $\sigma = 0.1$   
(ротор динамически вытянут).

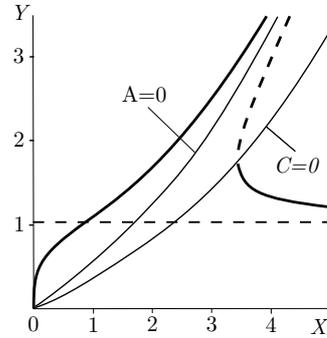


Рис. 18.  $k = -0.8$ ,  $d = 2.0$ ,  $\sigma = 0.1$   
(ротор динамически сжат).

По линейному приближению определены неустойчивые режимы симметричной гиперboloидальной прецессии, которые отмечены штриховой линией.

**В пятой главе** проведено исследование цилиндрических и конических прецессий ротора, имеющего только один тип неуровновешенности и установленно-го в нелинейных подшипниках. Построено множество нелинейных резонансов и амплитудно-частотные характеристики. Получено уравнение для определения параметров самоцентрирования ротора. Во всем диапазоне угловых скоростей исследована устойчивость по линейному приближению. Обнаружены бифуркации с сохранением типа прецессии и с появлением гиперboloидальных прецессий. Численно найдена граница возбуждения автоколебаний, показано, что возможна хаотизация предельных циклов и переходы типа "хаос — хаос", а также неограниченный рост амплитуды.

В § 5.1 исследуются цилиндрические прецессии статически неуровновешенно-го ротора, причем рассматриваются как нелинейные характеристики опор типа Герца, так и нелинейные характеристики типа Дuffинга.

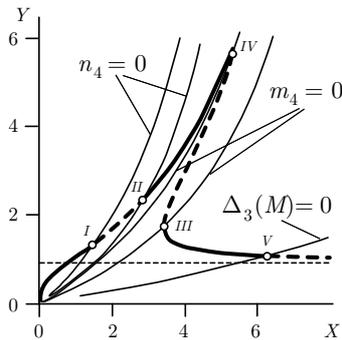


Рис. 19. Устойчивые и неустойчивые режимы цилиндрической прецессии.

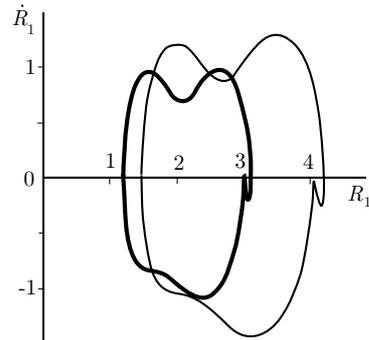


Рис. 20. Предельный цикл для шипа и для точки крепления ротора к валу.

В обоих случаях получены аналитические выражения для амплитудно- и фазово-частотных характеристик. На рис. 19 показана АЧХ цилиндрической пре-

цессии для упругих опор с нелинейной характеристикой Герца. Также получены уравнения для определения параметров самоцентрирования при больших угловых скоростях вращения. С применением стандартного метода линейного анализа устойчивости показано, что неустойчивость имеет место вблизи нелинейных резонансов и связана с прохождением параметра частоты через значение, при котором характеристическое уравнение имеет нулевой корень. При этом потеря устойчивости может быть "жесткой" и "мягкой". В первом случае тип прецессии сохраняется, а во втором потеря устойчивости цилиндрической прецессии сопровождается появлением двух устойчивых прецессий гиперболоидального типа. Эти явления мало отличаются от соответствующих сценариев потери устойчивости для жесткого ротора. На рис. 19 асимптотически устойчивые участки АЧХ отмечены сплошной линией, а неустойчивые — штриховой.

В закритической области потеря устойчивости обусловлена дестабилизирующим влиянием внутреннего трения и связана с прохождением параметра частоты через значение, при котором характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней. При этом определитель Гурвица третьего порядка обращается в ноль (кривая  $\Delta_3(M) = 0$  на рис. 19). Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (33) для динамически вытянутого ротора при  $d_2 = 0$  показало, что имеет место "мягкое" возбуждение автоколебаний и появляется предельный цикл Андронова — Хопфа. На рис. 20 представлены предельные циклы для конца оси вала (жирная линия) и для точки крепления ротора к валу (тонкая линия).

Как показал численный эксперимент, устойчивые автоколебания, соответствующие цилиндрической прецессии, существуют для достаточно больших значений частоты. Верхняя граница для автоколебаний не была обнаружена. При численном интегрировании всегда получается предельный цикл, параметризующий цилиндрическую прецессию, если начальные условия заданы симметричными (например,  $R_1 = R_2$ , а остальные величины нулевые) или близкими к симметричным. Однако, в узком интервале частот вблизи границы возбуждения автоколебаний  $\Delta_3(M) = 0$  при изменении начальных данных автоколебания теряют свою устойчивость, может происходить хаотизация предельных циклов.

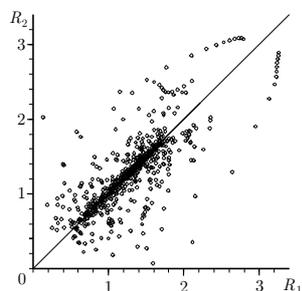


Рис. 21. Отображение Пуанкаре на пл.  $\{R_1, R_2\}$  ( $\tau = 0[\text{mod}(2\pi/\Omega)]$ ).

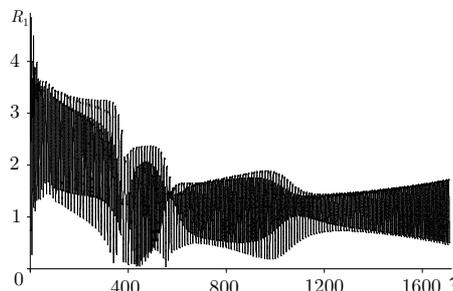


Рис. 22. Зависимость  $R_1 = R_1(\tau)$  за время, равное 700 оборотам ротора.

При  $X = 6.6$  и начальных данных  $R_1 = 0.75, R_2 = 3.75$  (остальные равны нулю) на интервале времени, соответствующем 700 оборотам ротора, наблюдается хаотическое вращение. Отображение Пуанкаре на сечении шестимерного фазового пространства  $\{R_1, \dot{R}_1, R_2, \dot{R}_2, \varphi_1 - \varphi_2, \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2\}$  плоскостью  $\{R_1, R_2\}$  подтверждает наличие хаоса (рис. 21). На рис. 22 показана зависимость  $R_1 = R_1(\tau)$  в течение всего промежутка интегрирования, равного 700 оборотам ротора. Ясно выделяются четыре этапа движения. На рис. 23 показаны фазовые траектории на плоскости  $\{R_1, \dot{R}_1\}$  для каждого из этапов. Зависимость  $R_2 = R_2(\tau)$  и фазовые траектории для второго шипа имеют точно такой же вид. Наблюдаются переходы типа "хаос - хаос".

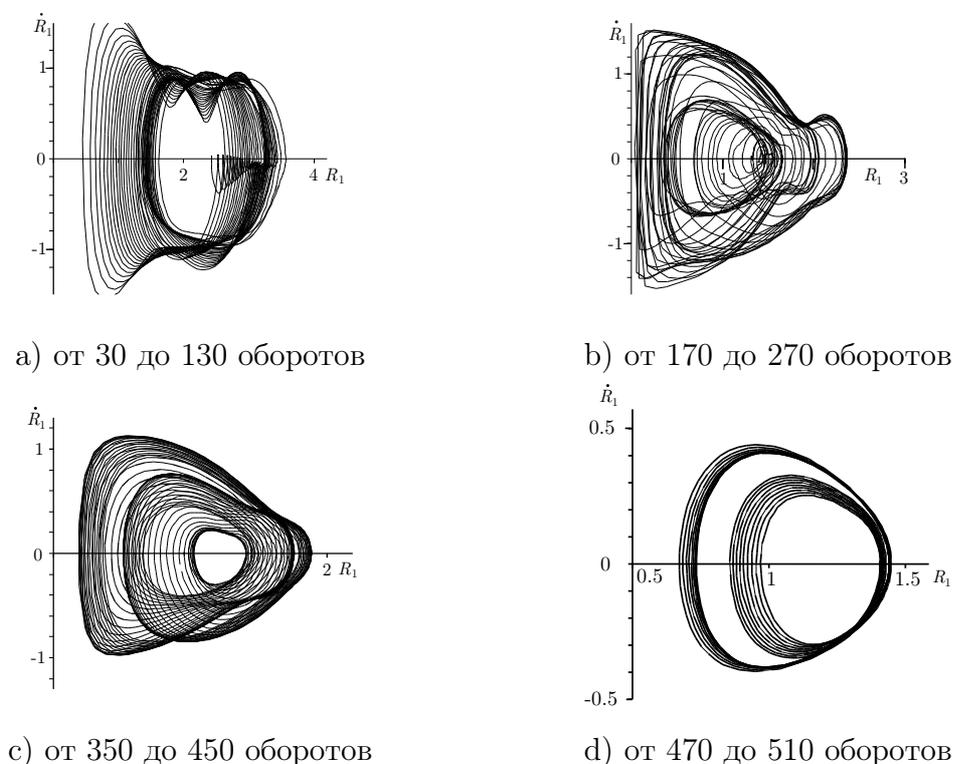


Рис. 23 Фазовые траектории на плоскости  $\{R_1, \dot{R}_1\}$ .

Было проведено вычисление спектра ляпуновских показателей полученного странного аттрактора. Результаты вычислений приведены на рис. 24, где по оси абсцисс откладывается число оборотов ротора. В качестве начальной точки взяты значения переменных в момент времени, равный 100 оборотам ротора, шаг интегрирования равнялся 15 оборотам, число итераций равно 300. Спектр в последней точке вычислений равен:

$$\Lambda = \{0.003, 0.000, -0.000, -0.028, -0.047, -0.048, -0.072, -0.072\}.$$

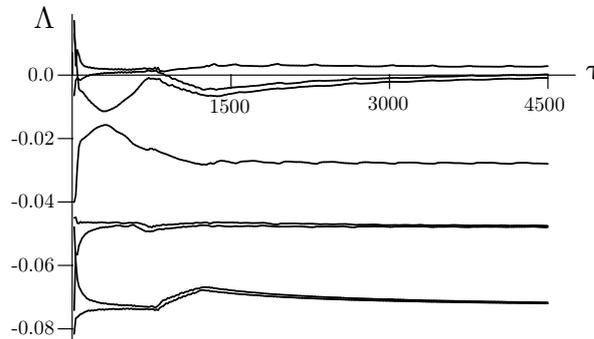


Рис. 21. Приближенное построение спектра ляпуновских показателей странного аттрактора.

Сигнатура спектра имеет вид  $(+, 0, 0, -, -, -, -)$ , характерный для хаотического аттрактора.

Потеря устойчивости цилиндрической прецессии в закритической области при нелинейной характеристике опор типа Дуффинга имеет свои особенности. При выбранных для численного исследования параметрах ротора хаотизация предельных циклов не была обнаружена, но, начиная с некоторой частоты, отмечен неограниченный рост амплитуды автоколебаний.

В § 5.2 изучаются конические прецессии динамически неуравновешенного ротора, укрепленного в упругих опорах с нелинейностью типа Герца. Применяется схема исследования, разработанная для жесткого ротора. Отметим особенности, связанные с потерей устойчивости при больших угловых скоростях, которая сопровождается отделением предельного цикла.

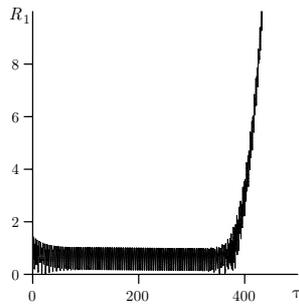


Рис. 25.

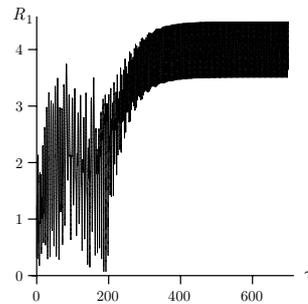


Рис. 26.

Если начальные данные выбрать таким образом, что начальное положение оси вращения соответствует образующей конуса, то после короткого переходного периода устанавливаются автоколебания конического типа, но через некоторый продолжительный промежуток времени автоколебания теряют устойчивость и происходит резкий рост амплитуды (см. рис. 25). При этом движение стремится к цилиндрическому вращению, так как разность фаз  $\psi_1 - \psi_1$  стремится к нулю. Если же начальные условия выбрать произвольными, то устанавливаются автоколебания со значительным средним значением амплитуды, причем переход в течение

длительного времени носит хаотический характер (см. рис. 26).

**В заключении** перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

**В приложении** приводится краткий исторический обзор, в котором содержатся сведения о первых работах и первых математических моделях в динамике роторов, а также показан вклад русских ученых в развитие теории быстровращающихся валов.

## Список работ по теме диссертации

- [1] *Пасынкова И. А.* Гиперболоидальная прецессия ротора в нелинейных упругих опорах // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* Сер. 1. Вып. 4. — 1997. — С. 88–95.
- [2] *Пасынкова И. А.* Прецессии жесткого неуравновешенного ротора в нелинейных упругих опорах // Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении. Материалы международной конференции. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1997. — С. 83–85.
- [3] *Пасынкова И. А.* Устойчивость конической прецессии жесткого неуравновешенного ротора // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* Сер. 1. Вып. 1. — 1998. — С. 82–86.
- [4] *Пасынкова И. А.* Влияние зазора в подшипниках крепления на конические прецессии неуравновешенного ротора // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* Сер. 1. Вып. 1. — 2005. — С. 103–110.
- [5] *Пасынкова И. А.* Потеря устойчивости конических прецессий неуравновешенного ротора в квазилинейных упругих опорах // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* Сер. 1. Вып. 2. — 2005. — С. 113–121.
- [6] *Пасынкова И. А.* Прецессионное движение ротора в нелинейных подшипниках с радиальным зазором // Международная конференция "Четвертые Окуневские чтения" Симпозиум "Пуанкаре и проблемы нелинейной механики". 22-25 июня 2004г., Санкт-Петербург: Материалы докладов. — Т. I. Теоретическая и прикладная механика. — СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2005. — С. 122–130.
- [7] *Пасынкова И. А.* Прецессионное движение ротора в нелинейных подшипниках с радиальным зазором // Международная конференция "Четвертые Окуневские чтения" Симпозиум "Пуанкаре и проблемы нелинейной механики". 22-25 июня 2004г., Санкт-Петербург: Тезисы докладов. — СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2005. — С. 17–18.
- [8] *Пасынкова И. А.* Установившиеся движения неуравновешенного ротора в подшипниках с радиальным зазором // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* Сер. 1. Вып. 3. — 2005. — С. 87–95.

- [9] *Пасынкова И. А.* Динамика ротора Джеффкотта в упругих нелинейных опорах // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докладов. — Т. I. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2006. — С. 94.
- [10] *Пасынкова И. А.* Бифуркации прецессионного движения неуравновешенного ротора // *Прикладная математика и механика* Вып. 4. — 2006. — С. 605–616.
- [11] *Пасынкова И. А.* Конические прецессии ротора Джеффкотта с четырьмя степенями свободы в нелинейных упругих опорах // Четвертые Поляховские чтения: Тезисы докладов. — СПб.: Изд-во "ВВМ", 2006. — С. 71.
- [12] *Пасынкова И. А.* Конические прецессии ротора Джеффкотта с четырьмя степенями свободы в нелинейных упругих опорах // Четвертые Поляховские чтения: Избранные труды. — СПб.: Изд-во "ВВМ", 2006. — С. 146 — 156.
- [13] *Пасынкова И. А.* Прецессии динамически неуравновешенного ротора Джеффкотта в нелинейных подшипниках // Международная конференция "Пятые Окуневские чтения" 26-30 июня 2006г., Санкт-Петербург. Тезисы докладов. — СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2006. — С. 25.
- [14] *Пасынкова И. А.* Прецессии неуравновешенного ротора нецентрально укрепленного в упругих опорах // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* Сер. 1. Вып. 1. — 2006. — С. 128–136.
- [15] *Пасынкова И. А.* Устойчивость симметричной гиперболоидальной прецессии неуравновешенного ротора // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* Сер. 1. Вып. 4. — 2006. — 86 - 94.
- [16] *Пасынкова И. А., Архипова И. М.* Исследование прецессионного движения неуравновешенного ротора // Вторые Поляховские чтения: Избр. труды. — СПб.: Изд-во НИИ Химии СПб. ун-та, 2000. — С. 65–72.
- [17] *Пасынкова И. А., Архипова И. М.* Несимметричные гиперболоидальные прецессии ротора в нелинейных упругих опорах // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* Сер. 1. Вып. 3. — 2001. — С. 47–50.
- [18] *Пасынкова И. А., Лебедева И. М.* Симметричные прецессии жесткого неуравновешенного ротора // Всероссийская научно-практическая конференция "Первые Окуневские чтения" . Материалы докладов. — СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 1997. — С. 141–142.
- [19] *Пасынкова И. А., Лебедева И. М.* Установившиеся вращения ротора в нелинейных упругих опорах без учета сопротивления. // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* Сер. 1. Вып. 3. — 1998. — С. 101–106.

- [20] Пасынкова И. А., Сабанеев В. С. Из истории развития динамики роторов // Четвертые Поляховские чтения: Тезисы докладов. — СПб.: Изд-во "ВВМ", 2006. — С. 240.
- [21] Пасынкова И. А., Сабанеев В. С. Из истории развития динамики роторов // Четвертые Поляховские чтения: Избранные труды. — СПб.: Изд-во "ВВМ", 2006. — С. 644 — 654.
- [22] Пасынкова И. А., Сабанеев В. С. Ранние модели в теории гибкого вала // Международная конференция "Пятое Окуневские чтения" 26-30 июня 2006г., Санкт-Петербург. Тезисы докладов. — СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2006. — С. 96.
- [23] Pasyukova I. A. Bifurcations of cylindrical precessions of an unbalanced rotor // XXXIII Summer - School Conference "Advanced Problems in Mechanics", 28.06-5.07.2005. APM 2005 Book of Abstracts. — 2005. — P. 73.
- [24] Pasyukova I. A. Whirling motion of an unbalanced rotor in linear and nonlinear elastic bearings // 7.Magdeburger Maschinenbau-Tage. 11.-12. Oktober 2005 an der Otto-von-Guericke-Universitaet Magdeburg. Tagungsband. — 2005. — Pp. 143–148.
- [25] Pasyukova I. A. Bifurcations of cylindrical precessions of an unbalanced rotor // *Technische Mechanik*. — 2006. — Vol. 26, no. 1. — Pp. 1–10.
- [26] Pasyukova I. A. Bifurcations of the precessional motion of an unbalanced rotor // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. — 2006. — Vol. 70, no. 4. — Pp. 549 – 559.
- [27] Pasyukova I. A. Cylindrical precessions of an unbalanced flexible rotor supported in nonlinear elastic bearings // XXXIV Summer - School Conference "Advanced Problems in Mechanics", June 25 — July 1, 2006. APM 2006 Book of Abstracts. — 2006. — P. 67.
- [28] Pasyukova I. A. Cylindrical precessions of an unbalanced jeffcott rotor with four degrees of freedom in non-linear elastic supports // *Technische Mechanik*. — 2006. — Vol. 26, no. 2. — Pp. 117 – 130.