

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Миронов Андрей Николаевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НАПРЯЖЕННО – ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧКИ ГЛАЗА  
ПРИ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАЦИЯХ**

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2007

Работа выполнена на кафедре гидроупругости математико–механического факультета Санкт–Петербургского государственного университета.

**Научный руководитель:**

доктор физ.-мат. наук,  
профессор  
Бауэр Светлана Михайловна

**Официальные оппоненты:**

доктор физ.-мат. наук,  
профессор  
Колпак Евгений Петрович

канд. физ.-мат. наук,  
профессор  
Смольников Борис Александрович

**Ведущая организация:**

Санкт–Петербургский государственный электротехнический университет.

Защита состоится "18" октября 2007 г. в 15:30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.30 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при СПбГУ по адресу: 198504, Санкт–Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28., ауд. 405

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. А.М. Горького СПбГУ по адресу: Санкт–Петербург, Университетская набережная., д. 7/9.

Автореферат разослан "17" сентября 2007 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
д.ф.-м.н., профессор

С. А. Зегжда.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В данном исследовании обсуждаются некоторые задачи теории оболочек в приложении к определению напряженно-деформированного состояния глаза при хирургических операциях по лечению отслоек сетчатки.

Отслойка сетчатки является тяжелой патологией и нередко приводит к значительному снижению зрения и слепоте. По некоторым оценкам, среди причин инвалидности по зрению отслойка сетчатки составляет до 9%, причем 84% страдающих этим недугом – лица трудоспособного возраста. Основная причина возникновения отслойки – разрыв сетчатки с последующим проникновением под нее жидкости. В 1953 г. E.Custodis предложил пломбировать зону разрыва сетчатки с помощью экстрасклеральных имплантатов, позже стали применять круговое сдавливание – циркуляр. С тех пор методы хирургического лечения постоянно совершенствуются, для изготовления имплантатов применяются различные материалы.

Применение методов механики для изучения напряженно-деформированного состояния глаза при экстрасклеральных методах лечения позволяет оценить риск и причины возможных послеоперационных осложнений, эффективность применения имплантатов различной формы и с различными механическими характеристиками.

Исследования механических свойств тканей глаза позволяют усовершенствовать методы расчета глазной оболочки при различных нагрузках, а развитие методов прижизненной оценки биомеханического статуса глазной оболочки делает перспективу внедрения результатов расчетов в клиническую практику вполне реальной.

**Целью** данной работы является построение моделей противоотслоечных операций, таких как циркуляр и локальное пломбирование; исследование нелинейности физических свойств склеральной ткани.

**Методы решения.** При решении поставленных задач применялись различные методы. При решении задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки глаза при наложении циркуляра узкой лентой использовались асимптотические методы. Контактные задачи решались методами, разработанными Ю.П.Артюхиным и Г.Я.Поповым. Ряд результатов получен численными методами.

### **Новые результаты, выносимые на защиту:**

1. Исследовано осесимметричное напряженно - деформированное состояние сферической оболочки при краевой нагрузке. Получены результаты,

позволяющие оценить значения напряжений, удлинения передне-задней оси и изменения внутреннего давления при приложении нагрузки не только по экватору, но и по параллели.

2. Построено решение контактной задачи, описывающей взаимодействие между упругой сферической оболочкой и абсолютно жестким кольцом по экватору. Также решена задача о контакте сферической оболочки и упругого сферического слоя. Полученные распределения контактной нагрузки позволяют оценить наиболее выгодную форму сечения кольца для которой при заданном значении прогиба пик нагрузки минимален.

3. Построена математическая модель локального пломбирования глаза.

4. Предложен способ построения нелинейного упругого потенциала склеральной ткани с использованием эмпирической зависимости. Результат исследований может быть применен при построении нелинейных моделей, позволяющих более адекватно описывать напряженно - деформированное состояние оболочки глаза при различных хирургических вмешательствах.

**Теоретическое и практическое значение.** Математический анализ напряженно - деформированного состояния оболочки глаза при противотслюечных операциях является объективным диагностическим и прогностическим критерием для выбора лечебной тактики.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается соответствием результатов, полученных по асимптотическим формулам с результатами численного решения задач, в некоторых случаях сравнением решений, полученных по линейной теории оболочек с результатами других авторов, а также согласованностью с экспериментальными данными.

**Апробация результатов.** Результаты, постановка и методы решения задач обсуждались на семинарах кафедр теоретической и прикладной механики и гидроупругости мат-мех ф-та СПбГУ, на конференции молодых ученых мех-мат ф-та МГУ (Москва, 1994), на II, III и V Всероссийских конференциях по биомеханике (Нижний Новгород, 1994, 1996, 2000), на Всероссийской научной конференции "Первые Поляховские чтения" (СПб., 1997), на XIII Международном конгрессе исследователей глаза (Париж, 1998), на II семинаре по биомеханике глаза в Московском НИИ глазных болезней им. Гельмгольца (Москва, 2001 г.), на XIII Европейской конференции по биомеханике (Вроцлав, 2002), на объединенном семинаре СПбГУ и ПГУПС "Компьютерные методы в механике сплошной среды" (СПб, 2006).

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 103 страницы. Список литературы содержит 152 наименования.

**Публикация результатов.** Основные результаты диссертации опубликованы в статьях и тезисах докладов [1 – 14], в том числе 2 статьи в журналах, рекомендованных ВАК. В статье [1] автором получены численные результаты. Экспериментальные данные, используемые в работах, получены Б.А.Зиминим. В совместных работах [1,6,8] медицинские аспекты изучаемых проблем представлены врачами – офтальмологами В.В. Волковым, А.Б. Качановым, О.В. Светловой, Л.В.Багровой; постановка задач в работах [3 – 5] принадлежит Семенову Б.Н., в работах [9 – 11, 14] – Бауэр С.М. Модели, представленные в работах [1,3,4] также вошли в учебные пособия по математическому моделированию в биомеханике (Пальмов В.А., Зинковский А.В. (ред.); Бегун П.И., Афонин П.Н.) и в монографии (Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е.; Бегун П.И.).

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертации, приводятся общие сведения о структуре глаза, обзор литературы, посвященной биомеханическим аспектам рассматриваемых проблем, формулировка цели работы, основные положения, выносимые на защиту, и описание структуры диссертации.

**Первая глава** посвящена построению линейной модели операции циркуляжа.

В п. 1.1 выведены линейные уравнения равновесия непологой изотропной сферической оболочки в перемещениях при осесимметричной нагрузке.

В п. 1.2 приведены асимптотические приближения функций Лежандра, являющихся точным решением уравнений равновесия.

Расчетные формулы для перемещений, усилий и моментов получены в п. 1.3. При этом уточнено значение тангенциального перемещения, влияющего в большой степени на вычисление объема оболочки.

В п. 1.4 показана связь между выведенными уравнениями и классическими уравнениями В.В. Новожилова в комплексных усилиях. Показано, что найденное асимптотическое решение совпадает с решением, полученным интегрированием уравнений второго порядка в комплексных усилиях.

Моделирование циркляжа нитью или узкой лентой как краевой нагрузки, наложенной по параллели на безмоментное состояние оболочки, рассмотрено в п. 1.5. Приведенные уравнения позволяют получить решение для двух способов проведения операции циркляжа с применением нерастяжимого или растяжимого материала: для “обычного” способа, когда известен объем удаленной субретинальной жидкости, и операции на “сухом” глазу, когда во время операции поддерживается известное постоянное значение ВГД.

Для наиболее распространенного в клинической практике частного случая циркляжа по экватору, в п. 1.6 выведены формулы для оценки параметров операции. Результаты расчетов представлены в виде таблиц.

В п. 1.7 рассмотрен случай циркляжа в плоскости, параллельной экватору.

**Во второй главе** рассмотрено применение контактных задач теории оболочек при моделировании операции циркляжа.

В п. 2.1 изложена постановка одномерных контактных задач, учитывающая поперечную деформацию оболочки и приводящая к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, рассмотренная в работах Артюхина Ю.П., Карасева С.Н., Блоха М.В., Григолоука Э.И., Толкачева В.М. и др.

В п. 2.2 рассматривается замкнутая тонкая изотропная сферическая оболочка, обжатая по экватору абсолютно жестким кольцом. Форма сечения кольца симметрична относительно плоскости экватора. Определяется контактное напряжение  $\sigma(\theta)$ . Используется метод решения контактных задач, предложенный Ю.П. Артюхиным, в котором интегральное уравнение сводится к решению краевой задачи.

Так как задача симметрична относительно экватора, рассматривается только верхняя половина оболочки  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Искомое контактное напряжение удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\alpha\sigma(\theta) + 2\pi R^2 \int_{\pi/2-\psi}^{\pi/2} \sin \xi G(\theta, \xi) \sigma(\xi) d\xi = f(\theta), \quad \pi/2 - \psi \leq \theta \leq \pi/2. \quad (1)$$

Здесь  $\alpha = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)^2} \frac{(1-\nu^2)h}{E}$  – коэффициент, характеризующий обжатие оболочки по нормали,  $h$  – толщина,  $R$  – радиус оболочки,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $f(\theta)$  – функция формы сечения кольца,  $\psi$  – угол контакта.

Ядро  $G(\theta, \xi)$ , удовлетворяющее уравнению

$$LG(\theta, \xi) = \frac{R^2}{2\pi D \sin \theta} \delta(\theta - \xi), \quad \text{где } L = [\Delta\Delta + 4\beta^4],$$

$$\Delta = \frac{d^2}{d\theta^2} + \text{ctg}\theta \frac{d}{d\theta}, \quad D = Ehc^2, \quad 4\beta^4 = \frac{R^2}{c^2}, \quad c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}},$$

ограниченное в полюсе и симметричное относительно экватора, имеет вид

$$\frac{2\pi D}{\beta c R} G(\theta, \xi) = \begin{cases} \left( F_2^\beta(\theta) - F_1^\beta(\theta) \right) \left( F_2^\beta(\xi) + F_4^\beta(\xi) \right) - \\ - \left( F_1^\beta(\theta) + F_2^\beta(\theta) \right) \left( F_1^\beta(\xi) - F_3^\beta(\xi) \right), & 0 \leq \theta < \xi < \pi/2, \\ \left( F_2^\beta(\xi) - F_1^\beta(\xi) \right) \left( F_2^\beta(\theta) + F_4^\beta(\theta) \right) - \\ - \left( F_1^\beta(\xi) + F_2^\beta(\xi) \right) \left( F_1^\beta(\theta) - F_3^\beta(\theta) \right), & 0 < \xi < \theta \leq \pi/2, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$F_1^\beta(\theta) = \sin(\beta(\theta - \pi/2))e^{\beta(\theta - \pi/2)}, \quad F_2^\beta(\theta) = \cos(\beta(\theta - \pi/2))e^{\beta(\theta - \pi/2)},$$

$$F_3^\beta(\theta) = \sin(\beta(\theta - \pi/2))e^{-\beta(\theta - \pi/2)}, \quad F_4^\beta(\theta) = \cos(\beta(\theta - \pi/2))e^{-\beta(\theta - \pi/2)}.$$

Интегральное уравнение (1) сводится к следующей краевой задаче:

$$\Delta\Delta y(\theta) + \kappa^4 y(\theta) = \frac{R^4}{D\alpha} f(\theta), \quad y(\xi) = f(\xi) - \alpha\sigma(\xi), \quad 4\kappa^4 = \frac{R^2}{c^2} + \frac{R^4}{D\alpha}.$$

$$\sin \xi \left[ G(\theta, \xi) \frac{d}{d\xi} \Delta_\xi y(\xi) - \frac{dG(\theta, \xi)}{d\xi} \Delta_\xi y(\xi) + \right. \\ \left. + \Delta_\xi G(\theta, \xi) \frac{dy}{d\xi} - \frac{d}{d\xi} \Delta_\xi G(\theta, \xi) y(\xi) \right] \Bigg|_{\xi=\pi/2-\psi}^{\xi=\pi/2} = 0,$$

решение которой можно записать в виде

$$\sigma(\theta) = A_1 \Phi_1^\kappa(\theta) + A_2 \Phi_2^\kappa(\theta) + \sum_n \frac{1}{\alpha} \frac{n^2(n+1)^2 + 4\beta^4}{n^2(n+1)^2 + 4\kappa^4} B_n P_n(\cos \theta),$$

где  $\Phi_1^\kappa(\theta) = F_1^\kappa(\theta) - F_3^\kappa(\theta)$ ,  $\Phi_2^\kappa(\theta) = F_2^\kappa(\theta) + F_4^\kappa(\theta)$ ,  $B_i$  – коэффициенты разложения функции  $f(\theta)$  в ряд по полиномам Лежандра:  $f(\theta) = \sum_n B_n P_n(\cos \theta)$ , а коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$  определяются из системы

$$\begin{aligned} A_1 [q^3 \Phi_3^\kappa - q \Phi_4^\kappa + 2\Phi_1^\kappa] + A_2 [q^3 \Phi_4^\kappa + q \Phi_3^\kappa + 2\Phi_2^\kappa] = \\ = \sum_n \frac{8}{\alpha} \frac{\kappa^4 - \beta^4}{n^2(n+1)^2 + 4\kappa^4} B_n \left[ \left( \frac{n(n+1)}{4\beta^3} + \frac{1}{2\beta} \right) P_n^1 + P_n \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 [q^3 \Phi_3^\kappa + 2q^2 \Phi_2^\kappa + q \Phi_4^\kappa] + A_2 [q^3 \Phi_4^\kappa - 2q^2 \Phi_1^\kappa - q \Phi_3^\kappa] = \\ = \sum_n \frac{8}{\alpha} \frac{\kappa^4 - \beta^4}{n^2(n+1)^2 + 4\kappa^4} B_n \left[ \left( \frac{n(n+1)}{4\beta^3} - \frac{1}{2\beta} \right) P_n^1 + \frac{n(n+1)}{2\beta^2} P_n \right], \quad (3) \end{aligned}$$

$$\Phi_3^\kappa(\theta) = F_1^\kappa(\theta) + F_2^\kappa(\theta) + F_3^\kappa(\theta) - F_4^\kappa(\theta), \quad \Phi_i^\kappa = \Phi_i^\kappa(\pi/2 - \psi),$$

$$\Phi_4^\kappa(\theta) = F_1^\kappa(\theta) - F_2^\kappa(\theta) + F_3^\kappa(\theta) + F_4^\kappa(\theta), \quad q = \kappa/\beta.$$

*Обжатие жестким цилиндрическим кольцом.* На рис. 1 представлена зависимость распределения контактного напряжения от относительной длины интервала контакта  $(\pi/2 - \theta)/\psi$  для цилиндрического кольца радиусом  $R_1$  и шириной  $H = 2$  мм, оболочки с параметрами  $R = 12$  мм,  $h = 1$  мм,  $E = 14.3$  МПа,  $\nu = 0.4$ , соответствующими средним значениям для глаза человека, угла контакта  $\psi = \arctg(H/2R_1)$ .

Формулы (3) справедливы при безотрывном контакте (предполагается что оболочка приклеена к кольцу). Расчеты показывают, что когда зона контакта распространяется на всю ширину кольца (радиус кольца  $R_1 \approx 11.97$  мм), экватор оболочки отходит от кольца, и безотрывный контакт  $\sigma > 0$  в неприклеенной оболочке невозможен. При дальнейшем уменьшении  $R_1$  середина оболочки загружается небольшим контактным давлением, а зона отрыва смещается к границе области контакта (рис. 1), на которой достигается максимальное контактное напряжение.

Кривые на графике, обозначенные цифрами, построены при следующих значениях  $R_1$ : 1 – 11.9 мм, 2 – 11.6 мм, 3 – 11.3 мм, 4 – 11.0 мм, 5 – 10.7 мм, 6 – 10.4 мм, 7 – 10.1 мм.

*Обжатие жестким тороидальным кольцом.* В отличие от случая обжатия цилиндрическим кольцом, здесь угол контакта неизвестен, для его



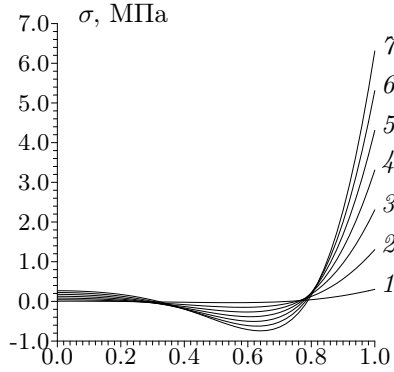


Рис. 1: Контактное напряжение под цилиндрическим кольцом.

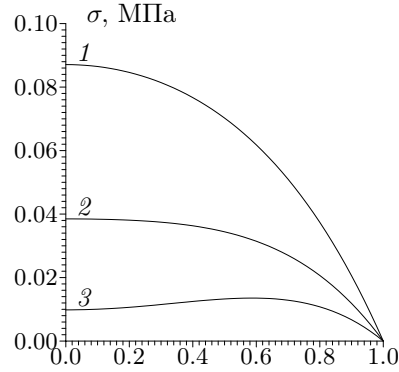


Рис. 2: Контактное напряжение под тороидальным кольцом.

определения к системе (3) нужно добавить соотношение  $\sigma(\pi/2 - \psi) = 0$ . Распределение контактного напряжения также имеет другой характер.

Процесс деформирования оболочки при обжатии тороидальным кольцом может быть условно разделен на два этапа. На начальном этапе длина интервала контакта и напряжение увеличиваются по мере уменьшения радиуса кольца, при этом напряжение распределено по Герцу.

На рис. 2 представлено распределение контактного напряжения на втором этапе для кольца, радиус сечения которого  $r = 2.0$  мм. Напряжение на экваторе оболочки начинает уменьшаться, появляется пик давления у конца интервала контакта. Кривые на графике, обозначенные цифрами, построены при следующих значениях  $w_0$  – прогиба оболочки в точке  $\pi/2$ : 1 – 1.342 мм, 2 – 1.362 мм, 3 – 1.372 мм. И, наконец, при  $w_0 \approx 1.375$  мм, середина оболочки теряет контакт с кольцом.

В п. 2.3 исследуется обжатие оболочки по экватору упругим сферическим слоем с краями  $\pi/2 \pm \psi$ ,  $\psi$  – угол контакта. Также как в п. 2.2 рассматривается верхняя половина оболочки  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Обозначая индексом "о" величины, относящиеся к оболочке, а индексом "к" – к кольцу, интегральное уравнение контакта, справедливое в области  $\pi/2 - \psi \leq \theta \leq \pi/2$ ,

можно записать в виде

$$d + (\alpha_O + \alpha_K) \sigma + 2\pi \int_{\pi/2-\psi}^{\pi/2} \sin(\xi) [R_O^2 G_O(\theta, \xi) + R_K^2 G_K(\theta, \xi)] \sigma(\xi) d\xi + w_K = 0. \quad (4)$$

Здесь  $d = R_K - R_O$ ,  $w_K$  – прогиб кольца, симметричный относительно экватора, удовлетворяющий уравнению равновесия  $L_K w_K = 0$  и обеспечивающий выполнение условий свободного края в точке  $\theta = \pi/2 - \psi$ :

$$\begin{aligned} \Delta w_K(\theta) + 2\pi \int_{\pi/2-\psi}^{\pi/2} R_K^2 \sin(\xi) \Delta G_K(\theta, \xi) \sigma(\xi) d\xi &= 0, \\ \frac{d}{d\theta} \Delta w_K(\theta) + 2\pi \int_{\pi/2-\psi}^{\pi/2} R_K^2 \sin(\xi) \frac{d}{d\theta} \Delta G_K(\theta, \xi) \sigma(\xi) d\xi &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Вид функций  $G_{O,K}(\theta, \xi)$ , имеющих смысл прогиба в точке  $\theta$  при действии единичной силы в точке  $\xi$ , определен уравнениями (2).

При введении новой функции  $y(\theta)$ , связанной с искомой соотношениями

$$\left[ \frac{R_O^4}{D_O} L_K + \frac{R_K^4}{D_K} L_O \right] y(\theta) = -d - w_K, \quad \sigma(\theta) = L_O L_K y(\theta),$$

интегральное уравнение (4) может быть сведено к следующей краевой задаче:

$$(\alpha_O + \alpha_K) L_O L_K y + \left[ \frac{R_O^4}{D_O} L_K + \frac{R_K^4}{D_K} L_O \right] y = -d - w_K. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sin \xi \sum_{n=0}^{n=1} \left\{ \frac{d}{d\xi} \Delta_\xi^{(3-n)} y(\xi) \Delta_\xi^{(n)} [R_K^2 G_K(\theta, \xi) + R_O^2 G_O(\theta, \xi)] - \right. \\ \left. - \Delta_\xi^{(3-n)} y(\xi) \frac{d}{d\xi} \Delta_\xi^{(n)} [R_K^2 G_K(\theta, \xi) + R_O^2 G_O(\theta, \xi)] + \right. \\ \left. + \frac{d}{d\xi} \Delta_\xi^{(1-n)} y(\xi) \Delta_\xi^{(n)} [4\beta_O^4 R_K^2 G_K(\theta, \xi) + 4\beta_K^4 R_O^2 G_O(\theta, \xi)] - \right. \\ \left. - \Delta_\xi^{(1-n)} y(\xi) \frac{d}{d\xi} \Delta_\xi^{(n)} [4\beta_O^4 R_K^2 G_K(\theta, \xi) + 4\beta_K^4 R_O^2 G_O(\theta, \xi)] \right\} \Bigg|_{\xi=\pi/2-\psi}^{\xi=\pi/2} = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Краевые условия (7) содержат восемь линейно-независимых функций  $F_{1,\dots,4}^{\beta_{\text{O}},\kappa}(\theta)$ . Приравнивая нулю коэффициенты при этих функциях, можно получить восемь уравнений, четыре из которых будут выполнены тождественно, а остальные вместе с уравнениями (5) образуют линейную систему относительно коэффициентов  $A_{1,\dots,6}$  решения уравнения (6):

$$y = A_1 \Phi_1^{\kappa_1}(\theta) + A_2 \Phi_2^{\kappa_2}(\theta) + A_3 \Phi_1^{\kappa_2}(\theta) + A_4 \Phi_2^{\kappa_2}(\theta) - \frac{d}{(\alpha_{\text{O}} + \alpha_{\text{K}}) 4\beta_{\text{O}}^4 4\beta_{\text{K}}^4 + \left[ \frac{R_{\text{O}}^4}{D_{\text{O}}} 4\beta_{\text{K}}^4 + \frac{R_{\text{K}}^4}{D_{\text{K}}} 4\beta_{\text{O}}^4 \right]} - \frac{w_{\text{K}}(\theta)}{\frac{R_{\text{K}}^4}{D_{\text{K}}} (4\beta_{\text{O}}^4 - 4\beta_{\text{K}}^4)},$$

где

$$w_{\text{K}} = A_5 \Phi_1^{\beta_{\text{K}}}(\theta) + A_6 \Phi_2^{\beta_{\text{K}}}(\theta), \quad 4\kappa_1^4 = -\lambda_1, \quad 4\kappa_2^4 = -\lambda_2,$$

$\lambda_{1,2}$  – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \lambda \left( 4\beta_{\text{O}}^4 + 4\beta_{\text{K}}^4 + \frac{R_{\text{O}}^4}{D_{\text{O}}(\alpha_{\text{O}} + \alpha_{\text{K}})} + \frac{R_{\text{K}}^4}{D_{\text{K}}(\alpha_{\text{O}} + \alpha_{\text{K}})} \right) + 4\beta_{\text{O}}^4 4\beta_{\text{K}}^4 + \left[ \frac{R_{\text{O}}^4}{D_{\text{O}}} 4\beta_{\text{K}}^4 + \frac{R_{\text{K}}^4}{D_{\text{K}}} 4\beta_{\text{O}}^4 \right] \frac{1}{(\alpha_{\text{O}} + \alpha_{\text{K}})} = 0.$$

*Результаты.* На рис. 3 представлена зависимость распределения контактного напряжения от относительной длины интервала контакта для упругого силиконового кольца шириной  $H = 2.5$  мм, с параметрами  $h_{\text{K}} = 0.6$  мм,  $E_{\text{K}} = 1.93$  МПа,  $\nu_{\text{K}} = 0.5$ , оболочки с параметрами  $R_{\text{O}} = 12$  мм,  $h_{\text{O}} = 1$  мм,  $E_{\text{O}} = 14.3$  МПа,  $\nu_{\text{O}} = 0.45$ , угла контакта  $\psi = \text{arctg}(H/2R_{\text{K}})$ .

Кривые на графике, обозначенные цифрами, построены при следующих значениях  $R_{\text{K}}$ : 1 – 11.5 мм, 2 – 11.0 мм, 3 – 10.5 мм, 4 – 10.0 мм, 5 – 9.5 мм.

Как видно из рисунка, характер распределения напряжения аналогичен случаю обжатия жестким цилиндрическим кольцом: середина оболочки нагружена небольшим контактным давлением, максимальное контактное напряжение достигается на кромке кольца и растет по мере уменьшения радиуса кольца. При этом, в отличие от обжатия жестким кольцом, упругое кольцо имеет безотрывный контакт с оболочкой, зона отрыва появляется при  $R_{\text{K}} \approx 10$  мм, а максимальные значения напряжения на границе зоны контакта оказываются существенно меньше.

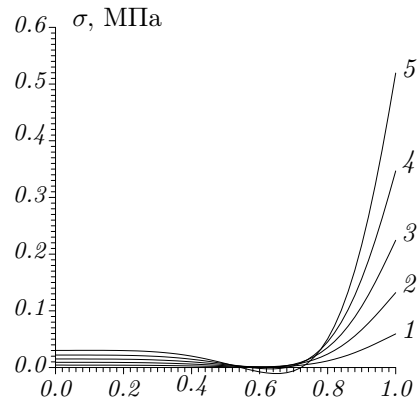


Рис. 3: Контактное напряжение под упругим кольцом.

Пережатие волокон склеры в областях максимума контактной нагрузки при чрезмерном затягивании циркулярного кольца по видимому является основной причиной изменения прозрачности и других свойств склеральной ткани – так называемого синдрома “бельевой веревки”, а также возможного прорезывания.

Применение упругих имплантатов и жгутов позволяет перераспределить нагрузку и существенно уменьшить максимальные значения напряжений, тем самым снизить риск пережатия волокон и их прорезывания.

**В третьей главе** модель локального пломбирования рассматривается как задача контактного взаимодействия однородной упругой оболочки с абсолютно жестким эллипсоидальным штампом. Пломба обычно пришивается П-образными швами. Полагается, что их расположение таково, что усилие  $Y$ , возникающее при затягивании швов, распределено равномерно по параллели крепления  $\theta = \theta_0$ . Сила  $P$ , приложенная к штампу, компенсируется усилием  $Y$ . Слизистая оболочка глаза рассматривается как тонкий слой смазки, поэтому касательными напряжениями в зоне контакта можно пренебречь. Кроме того предполагается, что расстояние от параллели крепления до оси симметрии и размер зоны контакта малы по сравнению с радиусом оболочки. Поэтому, разделив оболочку по параллели  $\theta = \theta_0$  на две, часть оболочки, контактирующая со штампом, считается полой. И для нее рассматриваются уравнения равновесия при действии

единичной силы, приложенной по параллели  $\xi$  (Артюхин Ю.П.)

$$\begin{aligned}\Delta\Delta w - \frac{R}{D}\Delta F &= \frac{R^2}{2\pi D x}\delta(x - \xi) \\ E R h \Delta w + \Delta\Delta F &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь  $w$  – прогиб,  $F$  – функция напряжений,  $h$  – толщина,  $R$  – радиус оболочки,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\delta$  – дельта-функция,  $r$  – расстояние до оси  $Z$ ,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}.$$

Общее решение уравнений (8) представляется в виде суммы решений однородной системы и фундаментального решения системы (8). В частности,  $w = w_1 + G$ , а  $w_1$  имеет вид (Артюхин Ю.П., Коренев Б.Г.)

$$w_1 = C_1 \operatorname{ber}(\varepsilon x) + C_2 \operatorname{bei}(\varepsilon x) + C_3 \operatorname{ker}(\varepsilon x) + C_4 \operatorname{kei}(\varepsilon x) + C_5 + C_6 \ln(x),$$

где  $\operatorname{ber}$ ,  $\operatorname{bei}$ ,  $\operatorname{ker}$ ,  $\operatorname{kei}$  – функции Кельвина (Томпсона),  $\varepsilon^4 = \frac{R^2 E h}{D}$ .

Функция  $G(x, \xi)$ , которая также выражается через функции Кельвина, удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta G(x, \xi) + \frac{R^2 E h}{D} G(x, \xi) = \frac{R^2}{2\pi D x} \delta(x - \xi).$$

Для контактных напряжений  $\sigma(x)$  в области контакта  $0 < x < \bar{x}$  справедливо уравнение (Артюхин Ю.П., Попов Г.Я.)

$$\alpha \sigma(x) + 2\pi R^2 \int_0^{\bar{x}} G(x, \xi) (\sigma(\xi) - p) \xi d\xi = -w_1(x) + f(x), \quad (9)$$

где  $p$  – изменение внутреннего давления,  $\bar{x}$  – граница области контакта,  $f(x)$  – функция формы и жесткого смещения штампа.

Напряженно-деформированное состояние второй, непологой части оболочки определяется соотношениями первой главы. Неизвестные коэффициенты определяются из системы нелинейных уравнений, получающейся при сведении интегрального уравнения контакта к краевой задаче, условий сопряжения оболочек, равенства контактного напряжения нулю на

границе области контакта и условия равновесия штампа. Эта система решалась численно, зона контакта находилась в процессе решения методом итераций. Представлены результаты расчетов для штампа в форме эллипсоида вращения.

**В четвертой главе** изучается задача конструирования нелинейного упругого потенциала склеральной ткани. Склеральную ткань можно отнести к разряду мягких биологических тканей (п. 4.1). Механические свойства этих тканей являются важным диагностическим параметром при оценке их состояния. В практических расчетах мягкие биологические ткани (в том числе и склеру) можно рассматривать как несжимаемые трансверсально-изотропные тела. Кроме того, по мнению К.Ф.Черных, деформационное изменение площади срединной поверхности биологических мембран мало. Тогда упругий потенциал следует брать в виде

$$\Phi_0 = A\chi(\Psi_1^0) + C\Psi_2^0. \quad (10)$$

Здесь  $A, C, \chi(\Psi_1^0)$  – постоянные и функции материала,  $\Psi_1^0, \Psi_2^0$  – значения главных инвариантов тензора деформаций на срединной поверхности оболочки. Для данного вида упругого потенциала в п. 4.2 приведены основные безмоментные соотношения нелинейной теории оболочек (Кабриц С.А., Товстик П.Е., Черных К.Ф.). В п. 4.3 рассматривается симметричное двухосное растяжение оболочки при повышении внутреннего давления. На основании эмпирической зависимости между объемом глаза и внутренним давлением

$$\frac{dp}{dV} = ap + b, \quad (\text{McEwen и St.Helen}) \quad (11)$$

построена функция рассматриваемого упругого потенциала:

$$A\chi'(\Psi_1^0) = \frac{b\mathring{R}}{4a\mathring{h}} \left(\frac{\Psi_1^0}{2}\right)^{1/2} \left[ e^{a\frac{4}{3}\pi\mathring{R}^3 \left( \left(\frac{\Psi_1^0}{2}\right)^{3/2} - 1 \right)} - 1 \right] - \frac{C}{2}\Psi_1^0. \quad (12)$$

Зависимость изменения объема оболочки от роста давления носит логарифмический характер и хорошо согласуется с экспериментальными данными. Также рассчитаны значения констант и модуля Юнга. В п. 4.4 для упругого потенциала вида (10) проведен графический анализ экспериментальной зависимости “напряжение–деформация” при одноосном растяжении образца склеральной ткани вплоть до разрыва. Получены условия

существования решения и ограничения на константы упругого потенциала, построен график функции упругого потенциала. Приведены графики зависимости нагрузки от деформации для симметричного двухосного, одноосного растяжений и сдвига.

При одноосном нагружении упругий потенциал (10, 12) дает экспоненциальный рост нагрузки в зависимости от деформации, и не имеет точки перехода в линейный участок, как это наблюдается в эксперименте. Таким образом, применение упругого потенциала (10, 12) возможно только при малых деформациях, соответствующих физиологическим нагрузкам.

### СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Бауэр С.М., Зымин Б.А., Миронов А.Н., Бегун П.И., Качанов А.Б.* Построение изменений модели глаза при наложении циркулярного шва. // Повреждение органа зрения у детей. Сб. научн. трудов под ред. Е.Е. Сомова. СПб., 1991, С.57–64.
2. *Миронов А.Н.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния оболочки глаза при циркуляже в плоскости, параллельной экватору. // деп. в ВИНТИ, Вестн. ЛГУ. Мат., мех., астрон. Л., 1991, N 3220-В, 1991.
3. *Миронов А.Н., Семенов Б.Н.* Математическая модель пломбирования глаза. // II Всерос. конф. по биомеханике, Н.Новгород, 1994, Тез.докл., Т.2, С.72.
4. *Миронов А.Н., Семенов Б.Н.* Математическое моделирование эписклерального пломбирования глаза. // Прикладная механика. Вып.9. Динамика и устойчивость механических систем. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 1995. С.155–160.
5. *Mironov A.N., Semenov B.N.* Zum problem der mathematischen modellierung in der ophthalmologie //Technische Mechanik, no.3, 1996, pp. 245–249.
6. *Миронов А.Н., Волков В.В.* О математическом моделировании операции циркуляжа. // III Всерос. конф. по биомеханике, Н.Новгород, 1996. Тез.докл., Т.1, С. 158.

7. *Миронов А.Н.* Осесимметричная контактная задача для непологий сферической оболочки. // Прикладная механика. Вып.10. К 90-летию со дня рождения профессора Н.Н.Поляхова. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 1997. С.136–140.
8. *Bagrova L.V., Svetlova O.V., Mironov A.N.* Contact problems in mathematical simulation of retinal detachment surgery. // XIII International Congress of Eye Research, Paris, France, July 26-31, 1998, Addendum to the Book of Abstracts, p.13.
9. *Бауэр С.М., Миронов А.Н.* Напряженно-деформированное состояние оболочки глаза при некоторых противоотслоечных операциях. // V Всерос. конф. по биомеханике, Н.Новгород, 2000, Тез.докл., С.34.
10. *Бауэр С.М., Миронов А.Н.* Об изменении ригидности глаза после циркулярного склерального кливажа. // Биомеханика глаза, сб. трудов II семинара Моск. НИИ глазных болезней им. Гельмгольца, 2001, С.41–46.
11. *Bauer S.M., Mironov A.N.* On the Mathematical Simulation of the Stress-Strain State of the Eye Shell Undergoing the Scleral Buckling Procedure // Acta of Bioengineering and Biomechanics, Vol. 4, Suppl.1, 2002. Proceedings of the XIII Conference of the European Society of Biomechanics, Wroclaw, Poland, September 1-4, 2002, p.726-727
12. *Миронов А. Н.* О задаче конструирования упругого потенциала склеральной ткани. // Тр. семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2005–2006 гг. Под ред. А.Л.Смирнова, Е.Ф.Жигалко. – СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 2006. С. 130–142.
13. *Миронов А. Н.* Контакт сферической оболочки с абсолютно жестким кольцом // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.1. 2007. № 2. С. 124–127.
14. *Бауэр С. М., Миронов А. Н.* Контакт сферической оболочки с упругим кольцом // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.1. 2007. № 3. С. 122–125.