САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Демина Анна Федоровна

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛАДКИХ НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2007

Работа выполнена на кафедре параллельных алгоритмов
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Бурова Ирина Герасимовна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Жук Владимир Васильевич

доктор физико-математических наук,
профессор Вагер Борис Георгиевич.

Ведущая организация: Петербургский государственный
университет путей сообщения

Защита состоится "___" _____________ 2007 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.51 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "___" _____________ 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Мартыненко Б. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Интерес к неполиномиальным сплайнам возник давно (Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Варга Р. и др.). Наиболее простые сплайны (называемые минимальными) получаются из аппроксимационных соотношений (Михлин С.Г., Демьянович Ю.К., Бурова И.Г.).

В настоящее время интерес многих авторов вновь привлекли неполиномиальные сплайны (Квасов Б.И., G.W. Nühlbach, Yu. Tanq). Интерес к ним обусловлен удобством реализации на различных вычислительных системах и, в частности, с возможностью достижения более высокой точности результата при меньших затратах ресурсов ЭВМ. Представляется особенно важным исследовать приближения, обладающие свойством "точности" на достаточно произвольном множестве функций, и оценить погрешности полученных приближений.

Построение и свойства непрерывных и непрерывно дифференцируемых заданное число раз минимальных полиномиальных и тригонометрических интерполяционных сплайнов со свойством точности соответственно на алгебраических и тригонометрических полиномах заданной степени рассмотрены ранее некоторыми из упомянутых выше авторов. Отличительная черта этих сплайнов заключается в том, что аппроксимация строится отдельно на каждом сеточном интервале в виде линейной комбинации базисных сплайнов с коэффициентами, равными значениям приближаемой функции в нескольких соседних узлах сетки. Поскольку интерполяционные минимальные полиномиальные сплайны хорошо себя зарекомендовали при проведении последовательной интерполяции в реальном масштабе времени, то было бы интересно получить формулы для минимальных неполиномиальных непрерывно дифференцируемых заданное число раз сплайнов со свойством точности на степенях заданной достаточно гладкой произвольной функции.

Цель диссертационной работы

Целью диссертации является построение приближений неполиномиальными сплайнами минимального дефекта, обладающими свойством точности на обобщенных полиномах заданного порядка; построение приближений минимальными неполиномиальными интерполяционными непрерывно дифференцируемыми заданное число раз сплайнами, сравнение их с известными полиномиальными приближениями; получение оценок погрешности приближения с помощью полученных сплайнов; исследование свойств построенных сплайнов; составление алгоритмов и отладка соответствующих программных модулей.

Методы исследования

В диссертации используются методы теории функций вещественного переменного, методы линейной алгебры, теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для построения базисов минимальных сплайнов применен метод аппроксимационных соотношений. Аналитическое моделирование осуществляется в среде Maple.

Достоверность и обоснованность

Достоверность результатов подтверждена доказанными теоремами и проведенными многочисленными тестами. Результаты численных экспериментов приведены в диссертации.

Результаты, выносимые на защиту

1. Исследованы минимальные неполиномиальные сплайны, удобные для решения интерполяционной задачи Лагранжа, обладающие локальным интерполяционным базисом и свойством точности на обобщенных полиномах заданного порядка. Получена оценка погрешности на локальных квазиравномерных сетках. Составлены оптимальные алгоритмы и отлажены соответствующие программные модули.

2. Построены минимальные интерполяционные неполиномиальные непрерывно дифференцируемые заданное число раз сплайны со свойством точности на степенях, в том числе, возможно, отрицательных, заданной достаточно гладкой произвольной функции. Получены оценки погрешности приближения. Получены соотношения между неполиномиальными и известными минимальными полиномиальными сплайнами.

3. Построены непрерывные и непрерывно дифференцируемые сплайны со свойством точности на положительных и отрицательных дробных степенях аргумента. Носитель базисного сплайна состоит из трех соседних сеточных промежутков. Получены оценки погрешности приближения.

4. Исследованы некоторые неполиномиальные сплайны третьего порядка специального вида.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Выделим основные:

1. На локальной квазиравномерной сетке получена оценка погрешности приближения минимальными неполиномиальными сплайнами, обладающими локальным интерполяционным базисом и свойством точности на обобщенных полиномах заданного порядка, удобными для решения интерполяционной задачи Лагранжа.

2. Построены минимальные неполиномиальные интерполяционные непрерывно дифференцируемые заданное число раз сплайны со свойством точности на степенях, в том числе возможно отрицательных, заданной достаточно гладкой произвольной функции. Получена оценка погрешности приближения.

3. Построены непрерывные и непрерывно дифференцируемые сплайны со свойством точности на положительных и отрицательных дробных степенях аргумента. Получены оценки погрешности приближения.

4. Разработаны программные модули, генерирующие минимальные интерполяционные неполиномиальные непрерывно дифференцируемые заданное число раз базисные сплайны со свойством точности на степенях (в том числе возможно отрицательных) заданной достаточно гладкой произвольной функции.

5. Разработаны алгоритмы для генерации непрерывно дифференцируемых сплайнов минимального дефекта.

Теоретическая и практическая полезность

Работа носит теоретический характер и представляет теоретический и практический интерес, может быть использована как в исследовательских, так и в обучающих целях. Полученные результаты могут быть применены для создания высокоэффективных алгоритмов решения различных практических прикладных задач. Результаты могут быть использованы при решении задач интерполяции и аппроксимации вещественных функций одной и многих переменных как на конечной, так и на бесконечной сетке узлов, сгущающейся к точке особенности, при сжатии и последующем восстановлении с заданной погрешностью больших объемов графической информации, при численном решении ряда задач математической физики, в том числе при решении краевых задач вариационными методами, а также при построении параллельных форм алгоритмов перечисленных здесь задач.

Апробация работы

Основные результаты были доложены на следующих конференциях и семинарах:

1. International conference in memory of V.I.Zubov. "Stability and Control Processes". 29.06-1.07.2005. SPb.

2. XXXVII Международная научная конференция аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость", 11-13 апреля 2006 г. СПб.

Результаты были использованы при чтении лекций по вычислительной математике для студентов математико-механического факультета

Основные результаты опубликованы (см. раздел "Публикации автора по теме диссертации"в конце автореферата) в статьях [1], [2], [5] и материалах конференций [3], [4].

Структура и объем работы

Диссертация объемом 153 страницы состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы и параграфы, двух приложений и списка литературы. Содержит 24 таблицы, 24 рисунка и список цитируемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. В первой главе рассматривается аппроксимация функций с помощью неполиномиальных сплайнов минимального и максимального дефектов . Приводятся оценка погрешности приближения и выражение остатка, рассматриваются частные случаи. Сетка узлов может быть как равномерной, так и неравномерной.

Пусть l, s, n — целые числа, связанные соотношениями $l \geq 1$, $s \geq 1$, $l + s = n$, $\{x_j\}$ — упорядоченная по возрастанию сетка узлов на промежутке $[a,\ b]$. Предположим, что функция $u \in C[a,\ b]$ задана в узлах сетки x_j, а $\varphi_i(x)$, $\ i = 1, \ldots, n$, — некоторые достаточно гладкие и линейно независимые на промежутке $[a,\ b]$ функции.

Обозначим $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))^T$. Считаем, что функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, и сетка $\{x_j\}$ выбраны таким образом, что определитель

$$\Delta_j = \det(\Phi(x_{j-l+1}), \ldots, \Phi(x_{j+s})) \neq 0.$$

Приближение $\tilde{u}(x)$ к функции $u(x)$ строим в виде

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=j-l+1}^{j+s} u(x_k)\omega_k(x), \quad x \in [x_j,\ x_{j+1}).$$

Здесь сплайны $\omega_j(x)$, $\operatorname{supp}\omega_j = [x_{j-s},\ x_{j+l}]$, называемые *базисными*, находим из условия

$$\tilde{u}(x) \equiv u(x) \text{ при } u(x) = \varphi_i(x),\ i = 1, \ldots, n,\ x \in [a,\ b],$$

что приводит к системе уравнений

$$\sum_{k=j-l+1}^{j+s} \varphi_i(x_k)\omega_k(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ x \in [x_j,\ x_{j+1}). \tag{1}$$

Таким образом, базисные сплайны определяются следующим соотношением:

$$\omega_{j-k}(x) = \det(\Phi(x_{j-l+1}), \ldots, \Phi(x_{j-k-1}), \Phi(x), \Phi(x_{j-k+1}), \ldots, \Phi(x_{j+s}))/\Delta_j,$$
$$k = -s, -s+1, \ldots, l-1. \tag{2}$$

Получено выражение для остатка приближения интерполяционными минимальными сплайнами максимального дефекта, а также оценка погрешности приближения. Рассмотрена погрешность приближения на равномерной и равномерно сгущающейся сетках узлов.

Пусть $Lu = 0$ — однородное дифференциальное уравнение, имеющее фундаментальную систему решений $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$; предположим, что определитель Вронского $W(x)$,

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x), & \varphi_2'(x), & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x), & \varphi_2^{(n-1)}(x), & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

отличен от нуля при $x \in [a,\ b]$.

Пусть $W_{ni}(x)$ — алгебраические дополнения i-го элемента n-й строки определителя $W(x)$.

Для непрерывной функции $f(t)$, $\ t \in [c, d]$, обозначим $||f||_{[c,d]} = \max\limits_{t \in [c,d]} |f(t)|$.

Теорема 1 . *Остаток приближения функции $u(x) \in C^n[a,b]$ непрерывными лагранжевыми сплайнами имеет вид*

$$R(x) = \tilde{u}(x) - u(x) = \sum_{k=j-l+1}^{j+s} \frac{(x_k - x)^n}{n!} \omega_k(x)(Lu)(\xi_k) \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i^{(n-1)}(\tilde{\tau}_k) W_{ni}(\xi_k)}{W(\xi_k)}, \quad (3)$$

где ξ_k и $\tilde{\tau}_k$ находятся между x_k и x, а оценка погрешности приближения такова

$$|R(x)|_{x\in[x_j,\ x_{j+1}]} \le \frac{\|Lu\|_{[x_{j-l+1},x_{j+s}]}}{n!} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i^{(n-1)}\|_{[x_{j-l+1},x_{j+s}]} \left\| \frac{W_{ni}}{W} \right\|_{[x_{j-l+1},x_{j+s}]} \cdot \sum_{k=j-l+1}^{j+s} |x_k - x|^n |\omega_k(x)|. \quad (4)$$

Далее рассматривается сетка узлов $\{x_k\}$ со свойством:

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} = B, \quad B > 0. \quad (5)$$

Обозначим

$$D_{k-j}(B) = \begin{cases} \frac{B^{k-j}-1}{B-1}, & \text{при } B \ne 1, \\ k-j, & \text{при } B = 1. \end{cases}$$

Теорема 2 . *Пусть дана сетка узлов со свойством (5) и $x \in [x_j,\ x_{j+1}]$. Тогда оценка погрешности приближения имеет вид*

$$|R(x)| \le \frac{\|Lu\|_{[x_{j-l+1},x_{j+s}]}}{n!} (x_{j+1} - x_j)^n \sum_{k=j-l+1}^{j+s} \max_{t\in[0,\ 1]} |D_{k-j}(B) - t|^n \times$$

$$\times \max_{t\in[0,\ 1]} |\omega_k(x_j + t(x_{j+1} - x_j))| \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i^{(n-1)}\|_{[x_{j-l+1},x_{j+s}]} \left\| \frac{W_{ni}}{W} \right\|_{[x_{j-l+1},x_{j+s}]}.$$

Теорема 3 . *При равномерной сетке узлов с шагом h, $x_k = x_0 + kh$, оценка погрешности приближения имеет вид*

$$|R(x)| \le \frac{\|Lu\|_{[x_{j-l+1},x_{j+s}]}}{n!} h^n \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i^{(n-1)}\|_{[x_{j-l+1},x_{j+s}]} \left\| \frac{W_{ni}}{W} \right\|_{[x_{j-l+1},x_{j+s}]} \times$$

$$\times \sum_{k=j-l+1}^{j+s} \max_{t\in[0,\ 1]} |k - j - t|^n \max_{t\in[0,\ 1]} |\omega_k(x_0 + jh + th)|,$$

где $x \in [x_j,\ x_{j+1}]$.

Главу завершает построение неполиномиальных сплайнов минимального дефекта.

2. Глава 2 посвящена интерполяционным минимальным неполиномиальным непрерывно дифференцируемым заданное число раз сплайнам со свойством точности на степенях заданной достаточно гладкой произвольной функции. Подсчитана оценка погрешности приближения и остаток.

Пусть l, s и n — целые числа, связанные соотношением $l+s=n+1$, $l\geq 1$, $s\geq 1$. Предположим, что в каждой точке x_j упорядоченной сетки узлов $\{x_j\}$, $\ldots<x_{j-1}<x_j<x_{j+1}\ldots$, задано значение $u(x_j)$ функции $u\in C^{n+1}[a,b]$.

Пусть, далее, функция $\varphi(x)$ — строго монотонна и $\varphi\in C^{n+1}[a,b]$. Показано, что определитель Вронского построенный по системе функций 1, $\varphi(x)$, $\varphi^2(x),\ldots,\varphi^n(x)$ равен $1!\ 2!\ldots n!(\varphi'(x))^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Функция $u(x)$ приближается выражением

$$\widetilde{u}(x)=\sum_{k=j-l+1}^{j+s}u(x_k)\omega_k(x),\quad x\in[x_j,\ x_{j+1}),$$

где базисные сплайны $\omega_j(x)$ находятся из условий

$$\widetilde{u}(x)\equiv u(x),\quad \text{при } u(x)=\varphi^i(x),\ i=0,1,\ldots,n,$$

что приводит к выражению вида

$$\omega_j(x)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{\substack{j'\neq j\\ -l+1\leq j'-k\leq s}}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_{j'})}{\varphi(x_j)-\varphi(x_{j'})},\quad x\in[x_k,\ x_{k+1}),\\ \qquad\qquad k=j-s,\ldots,j+l-1;\\ 0,\quad x\notin[x_{j-s},\ x_{j+l}]\end{cases}\tag{6}$$

Построены непрерывно дифференцируемые заданное число раз сплайны $\widetilde{\omega}_j(x)$ со свойством "точности" на системе функций 1, $\varphi(x)$, $\varphi^2(x),\ldots,\varphi^n(x)$. Сплайны строились путем расширения носителя базисного сплайна $\omega_j(x)$ на один сеточный интервал.

Теорема 4 . *Аппроксимация* $\widetilde{\widetilde{u}}(x)$, *вида*

$$\widetilde{\widetilde{u}}(x)=\sum_{k=j-l}^{j+s}u(x_k)\widetilde{\omega}_k(x),\quad x\in[x_j,\ x_{j+1}),$$

где $\widetilde{\omega}_j\in C^r[a,b]$ *строится по формулам*

$$\widetilde{\omega}_j(x)=\begin{cases}p_k(x)\displaystyle\prod_{\substack{j'\neq j\\ -l+1\leq j'-k\leq s}}\frac{\varphi(x_{k-l})-\varphi(x_{j'})}{\varphi(x_j)-\varphi(x_{j'})}+\\ +\displaystyle\prod_{\substack{j'\neq j\\ -l+1\leq j'-k\leq s}}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_{j'})}{\varphi(x_j)-\varphi(x_{j'})},\quad x\in[x_k,\ x_{k+1}),\\ \qquad\qquad k=j-s,\ldots,j+l-1;\\ -p_{j+l}(x);\quad x\in[x_{j+l},x_{j+l+1});\\ 0,\quad x\notin[x_{j-s},\ x_{j+l+1}],\end{cases}$$

$$p_k^{(\lambda)}(x_k)=-\frac{\left(\displaystyle\prod_{-l+1\leq j'-k\leq s-1}(\varphi(x)-\varphi(x_{j'}))\right)^{(\lambda)}_{x=x_k}}{\displaystyle\prod_{-l+1\leq j'-k\leq s-1}(\varphi(x_{k-l})-\varphi(x_{j'}))}.$$

$$p_k(x) = \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{\lambda!} p_k^{(\lambda)}(x_k)(x - x_{k+1})^{r+1} \sum_{i=0}^{r-\lambda} (-1)^i \frac{(r+i)!}{r!\ i!} \frac{(x - x_k)^{\lambda+i}}{(x_k - x_{k+1})^{r+i+1}},$$

обладает свойством

$$\tilde{\tilde{u}}(x) \equiv u(x) \text{ при } u(x) = \varphi^i(x),\ i = 0, 1, \dots, n.$$

Также рассмотрены сплайны с носителем $[x_{j-s-1},\ x_{j+l}]$.

Изучены свойства полученных гладких неполиномиальных базисных сплайнов. Рассматривались левые и правые гладкие минимальные сплайны.

Проведено сравнение непрерывных полиномиальных и неполиномиальные сплайнов на равномерной сетке узлов.

Теорема 5 . *Пусть $\{x_j\}$ — равномерная сетка узлов с шагом h. Непрерывные полиномиальные сплайны $\omega_j(x)$, определяемые из условия точности аппроксимации на функциях x^ν, $\nu = 0, 1, \dots, n$, и непрерывные неполиномиальные сплайны $\omega_j^*(x)$ со свойством точности на функциях $\varphi^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \dots, n$, связаны соотношением*

$$\omega_j^*(x_j + th) = \omega_j(x_j + th) + O(h).$$

Далее определяется остаток и устанавливается оценка погрешности приближения полученными сплайнами.

Теорема 6 . *Остаток приближения функции $u(x)$ функцией*

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=j-l+1}^{j+s} u(x_k)\omega_k(x), \quad x \in [x_j,\ x_{j+1}),$$

где базисный сплайн $\omega_j \in C[x_{j-s}, x_{j+l}]$ определяется формулой (6), имеет вид

$$R(x) = \sum_{k=j-l+1}^{j+s} \frac{(x_k - x)^{n+1}}{(n+1)!} \omega_k(x)(Lu)(\xi_k) \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_n(i) \frac{(\varphi^{i-1})^{(n)}(\tilde{\tau}_k)\varphi^{n-k+1}(\xi_k)}{(\varphi'(\xi_k))^n}, \qquad (7)$$

Здесь $\sigma_n(i) = (-1)^{n+i+1}(n-i+1)!(i-1)!$, а ξ_k и $\tilde{\tau}_k$ находятся между x_k и x. Оценка погрешности приближения такова

$$|R(x)|_{x\in[x_j,\ x_{j+1}]} \le \frac{\|Lu\|_{[x_{j-l+1}, x_{j+s}]}}{(n+1)!} \sum_{k=j-l+1}^{j+s} |x_k - x|^{n+1} |\omega_k(x)| \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n+1} (n-i+1)!(i-1)! \|(\varphi^{i-1})^{(n)}\|_{[x_{j-l+1}, x_{j+s}]} \left\| \frac{\varphi^{n-i+1}}{(\varphi')^n} \right\|_{[x_{j-l+1}, x_{j+s}]}.$$

Рассмотрены непрерывные и непрерывно дифференцируемые заданное число раз сплайны со свойством точности на положительных и отрицательных степенях заданной достаточно гладкой функции.

Пусть l, s, m и n — целые числа, связанные соотношением $l + s = m + n + 1$, $l \ge 1$, $s \ge 1$. Предположим, что в каждой точке x_j упорядоченной сетки узлов $\{x_j\}$, $0 < a < x_0 < \dots < x_{j-1} < x_j < x_{j+1} < \dots < b$, задано значение $u(x_j)$ функции $u \in C^{m+n+1}[a, b]$. Пусть, далее, функция $\varphi(x) \neq 0$ — строго монотонна и $\varphi \in C^{m+n+1}[a, b]$.

Теорема 7 . *Если сплайн $\omega_j \in C[a,b]$ строится по формуле*

$$\omega_j(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\varphi(x_j)}{\varphi(x)}\right)^n \displaystyle\prod_{\substack{j'\neq j \\ -l+1\leq j'-k\leq s}} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_{j'})}{\varphi(x_j)-\varphi(x_{j'})}, \quad x\in[x_k, x_{k+1}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k=j-s,\ldots,j+l-1; \\ 0, \quad x\notin[x_{j-s},\ x_{j+l}], \end{cases} \tag{8}$$

то аппроксимация $\widetilde{u}(x)$ вида

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{k=j-l+1}^{j+s} u(x_k)\omega_k(x), \quad x\in[x_j,\ x_{j+1}),$$

обладает свойством

$$\widetilde{u}(x) \equiv u(x) \text{ при } u(x) = \varphi^i(x),\ i=-n,\ldots,m.$$

Теорема 8 . *Если сплайн $\widetilde{\omega}_j \in C^r[a,b]$ строится по формулам*

$$\widetilde{\omega}_j(x) = \begin{cases} p_k(x)\left(\dfrac{\varphi(x_j)}{\varphi(x_{k-l})}\right)^m \displaystyle\prod_{\substack{j'\neq j \\ -l+1\leq j'-k\leq s}} \dfrac{\varphi(x_{k-l})-\varphi(x_{j'})}{\varphi(x_j)-\varphi(x_{j'})} + \\ +\left(\dfrac{\varphi(x_j)}{\varphi(x)}\right)^m \displaystyle\prod_{\substack{j'\neq j \\ -l+1\leq j'-k\leq s}} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_{j'})}{\varphi(x_j)-\varphi(x_{j'})}, \quad x\in[x_k,\ x_{k+1}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k=j-s,\ldots,j+l-1; \\ -p_{j+l}(x); \quad x\in[x_{j+l}, x_{j+l+1}); \\ 0, \quad x\notin[x_{j-s},\ x_{j+l+1}], \end{cases} \tag{9}$$

где

$$p_k^{(\lambda)}(x_k) = -\frac{\left(\varphi^{-n}(x) \displaystyle\prod_{-l+1\leq j'-k\leq s-1} (\varphi(x)-\varphi(x_{j'}))\right)^{(\lambda)}_{x=x_k} \varphi^n(x_{k-l})}{\displaystyle\prod_{-l+1\leq j'-k\leq s-1} (\varphi(x_{k-l})-\varphi(x_{j'}))}, \tag{10}$$

$$p_k(x) = \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{\lambda!} p_k^{(\lambda)}(x_k)(x-x_{k+1})^{r+1} \sum_{d=0}^{r-\lambda} (-1)^d \frac{(r+d)!}{r!\ d!} \frac{(x-x_k)^{\lambda+d}}{(x_k-x_{k+1})^{r+d+1}}, \tag{11}$$

то аппроксимация $\widetilde{\widetilde{u}}(x)$, вида

$$\widetilde{\widetilde{u}}(x) = \sum_{k=j-l}^{j+s} u(x_k)\widetilde{\omega}_k(x), \quad x\in[x_j,\ x_{j+1}),$$

обладает свойством

$$\widetilde{\widetilde{u}}(x) \equiv u(x) \text{ при } u(x) = \varphi^i(x),\ i=-n,\ldots,m.$$

3. В третьей главе рассматриваются непрерывные и непрерывно дифференцируемые сплайны со свойством "точности" на положительных и отрицательных степенях аргумента. Базисные функции предложенных сплайнов имеют носитель, состоящий из трех соседних сеточных промежутков. Приводятся оценки погрешности приближения и численные эксперименты.

Построены непрерывные сплайны со свойством "точности" на функциях 1, x, $1/x$. Приводятся оценки погрешности приближения. На равномерной сетке узлов $\{x_j\}$ с шагом h: $0 < x_0 < x_1 < \ldots$, оценка погрешности приближения имеет вид

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq h^3 \left(\frac{17}{48} + \frac{h}{64x_0}\right) \left\|\frac{3}{x}\ u'' + u'''\right\|_{[x_{j-1},\ x_{j+1}]}.$$

Построены непрерывные сплайны со свойством "точности" на функциях 1, $1/x$, $1/x^2$. Приводятся оценки погрешности приближения. На равномерной сетке узлов $\{x_j\}$ с шагом h: $0 < x_0 < x_1 < \ldots$, оценка погрешности приближения имеет вид

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq h^3 \left(\frac{17}{96} + h\frac{5x_0 + 2h}{320x_0^2}\right) \left\|\frac{6}{x^2}u' + \frac{6}{x}u'' + u'''\right\|_{[x_{j-1},\ x_{j+1}]}.$$

Далее получены непрерывно дифференцируемые сплайны минимального дефекта со свойством "точности" на функциях 1, x, $1/x^\alpha$, где α может быть как целым, так и дробным положительным или отрицательным числом, $\alpha \neq 0, -1$.

Рассматриваются задачи интерполяции следующего вида

$$T_0(k)\tilde{u}(x_s) + T_1(k)\tilde{u}'(x_s) = T_0(k)u(x_s) + T_1(k)u'(x_s), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где

$$T_0(k) = \alpha\frac{x_{k+1}^{\alpha+1} - x_k^{\alpha+1}}{x_{k+1}^{\alpha+1}x_k^{\alpha+1}},$$
$$T_1(k) = \frac{-\alpha x_{k+1}x_k^\alpha + \alpha x_k^{\alpha+1} + x_{k+1}^{\alpha+1} - x_k^\alpha x_{k+1}}{x_{k+1}^{\alpha+1}x_k^\alpha}.$$

Теорема 9 . *Пусть $[x_0,\ x_m] \in (a,\ b)$, приближение $\tilde{u}(x)$ к функции $u \in C^1[x_0,\ x_m]$ задается формулами*

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=j-1}^{j+1} \left(T_0(k)u_k + T_1(k)u_k'\right)\omega_k(x),$$

где

$$\omega_{j-1}(x) = \frac{\mu}{\nu}x_{j-1}^{\alpha+1}x_j^{\alpha+1}\left(\alpha x^{\alpha+1} - (\alpha+1)x^\alpha x_{j+1} + x_{j+1}^{\alpha+1}\right),$$

$$\omega_j(x) = \frac{\mu}{\nu\eta}x_j^{\alpha+1}x_{j+1}^{\alpha+1}\Big(\alpha x^{\alpha+1}\Big[(x_{j+2} - x_{j+1})(x_j^{\alpha+1} - x_{j-1}^{\alpha+1}) + (x_j - x_{j-1})\times$$
$$\times(x_{j+1}^{\alpha+1} - x_{j+2}^{\alpha+1})\Big] - (\alpha+1)x^\alpha\Big[x_jx_{j-1}(x_j^\alpha - x_{j-1}^\alpha)(x_{j+2} - x_{j+1}) -$$
$$-x_{j+2}x_{j+1}(x_{j+2}^\alpha - x_{j+1}^\alpha)(x_j - x_{j-1})\Big] + \Big[x_jx_{j-1}(x_j^\alpha - x_{j-1}^\alpha)\times$$
$$\times(x_{j+2}^{\alpha+1} - x_{j+1}^{\alpha+1}) - x_{j+2}x_{j+1}(x_{j+2}^\alpha - x_{j+1}^\alpha)(x_j^{\alpha+1} - x_{j-1}^{\alpha+1})\Big]\Big)$$

$$\omega_{j+1}(x) = \frac{\mu}{\eta}x_{j+1}^{\alpha+1}x_{j+2}^{\alpha+1}\left(\alpha x^{\alpha+1} - (\alpha+1)x^\alpha x_j + x_j^{\alpha+1}\right).$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\mu = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)x^{\alpha}},\\
&\nu = (x_j - x_{j-1})x_{j+1}^{\alpha+1} + (x_{j-1} - x_{j+1})x_j^{\alpha+1} + (x_{j+1} - x_j)x_{j-1}^{\alpha+1},\\
&\eta = (x_{j+1} - x_j)x_{j+2}^{\alpha+1} + (x_j - x_{j+2})x_{j+1}^{\alpha+1} + (x_{j+2} - x_{j+1})x_j^{\alpha+1}.
\end{aligned}
$$

Тогда при $x \in [x_0,\ x_m)$

$$u(x) = \widetilde{u}(x),\ \textit{если}\ u(x) = 1,\ x,\ 1/x^{\alpha}.$$

При $\alpha = 1$ погрешность приближения может быть подсчитана по формуле:

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \le \frac{1}{8}\ \left\|\frac{3}{x}\ u'' + u'''\right\|_{[x_{j-1},\ x_{j+1}]} \left(\left|\frac{x^4 - 3x_j^4 + 8x_j^3 x - 6x_j^2 x^2}{3x}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=j-1,j+1} \left| T_0(k)\frac{x_k^4 - 3x_j^4 + 8x_j^3 x_k - 6x_j^2 x_k^2}{3x_k} + T_1(k)\frac{x_k^4 - 2x_j^2 x_k^2 + x_j^4}{x_k^2}\right| \cdot |\omega_k(x)| \right),$$

а на равномерной сетке узлов $\{x_j\}$ с шагом h: $0 < x_0 < x_1 < \ldots$,

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \le h^3 \left(\frac{5}{12} + \frac{h}{48x_0}\right)\ \left\|\frac{3}{x}\ u'' + u'''\right\|_{[x_{j-1},\ x_{j+1}]}.$$

Построены непрерывно дифференцируемые сплайны со свойством "точности" на функциях 1, $1/x^{\alpha}$, $1/x^{\beta}$, где $\alpha,\ \beta$ могут быть как целыми, так и дробными положительными или отрицательными числами, $\alpha \ne 0$, $\beta \ne 0$, $\alpha \ne \beta$.

Теорема 10 . *Пусть* $[x_0,\ x_m] \in (a,\ b)$, *приближение* $\widetilde{u}(x)$ *к функции* $u \in C^1[x_0,\ x_m]$ *задается формулами*

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{k=j-1}^{j+1} \left(T_0(k)u_k + T_1(k)u'_k\right)\omega_k(x),$$

$$
\begin{aligned}
T_0(k) &= \alpha\beta\left(\frac{1}{x_k^{\alpha+1}x_{k+1}^{\beta+1}} - \frac{1}{x_k^{\beta+1}x_{k+1}^{\alpha+1}}\right),\\
T_1(k) &= \alpha\left(\frac{1}{x_{k+1}^{\beta}x_k^{\alpha+1}} - \frac{1}{x_k^{\alpha+\beta+1}}\right) + \beta\left(\frac{1}{x_k^{\alpha+\beta+1}} - \frac{1}{x_{k+1}^{\alpha}x_k^{\beta+1}}\right),
\end{aligned}
$$

$$\omega_{j-1}(x) = \frac{\mu}{\nu}x_{j-1}^{\alpha+\beta+1}x_j^{\alpha+\beta+1}\left((\beta-\alpha)x^{\alpha+\beta} + \alpha x^{\alpha}x_{j+1}^{\beta} - \beta x^{\beta}x_{j+1}^{\alpha}\right),$$

$$\omega_j(x) = \frac{\mu}{\nu\eta}x_j^{\alpha+\beta+1}x_{j+1}^{\alpha+\beta+1}\left((\beta-\alpha)x^{\alpha+\beta}\left[(x_{j+2}^{\alpha} - x_{j+1}^{\alpha})(x_j^{\beta} - x_{j-1}^{\beta}) - \right.\right.$$

$$\left. -(x_j^{\alpha} - x_{j-1}^{\alpha})(x_{j+2}^{\beta} - x_{j+1}^{\beta})\right] + \alpha x^{\alpha}\left[(x_{j+2}^{\beta} - x_{j+1}^{\beta})(x_j^{\beta}x_{j-1}^{\alpha} - \right.$$

$$\left. -x_j^{\alpha}x_{j-1}^{\beta}) - (x_j^{\beta} - x_{j-1}^{\beta})(x_{j+2}^{\beta}x_{j+1}^{\alpha} - x_{j+2}^{\alpha}x_{j+1}^{\beta})\right] - \beta x^{\beta}\left[(x_{j+2}^{\alpha} - \right.$$

$$\left.\left. -x_{j+1}^{\alpha})(x_j^{\beta}x_{j-1}^{\alpha} - x_{j-1}^{\beta}x_j^{\alpha}) - (x_j^{\alpha} - x_{j-1}^{\alpha})(x_{j+2}^{\beta}x_{j+1}^{\alpha} - x_{j+1}^{\beta}x_{j+2}^{\alpha})\right]\right),$$

$$\omega_{j+1}(x)=\frac{\mu}{\eta}x_{j+1}^{\alpha+\beta+1}x_{j+2}^{\alpha+\beta+1}\left((\beta-\alpha)x^{\alpha+\beta}+\alpha x^{\alpha}x_j^{\beta}-\beta x^{\beta}x_j^{\alpha}\right).$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mu&=\frac{1}{\alpha\beta(\alpha-\beta)x^{\alpha+\beta}},\\
\nu&=(x_j^{\alpha}-x_{j-1}^{\alpha})x_{j+1}^{\beta}+(x_{j-1}^{\alpha}-x_{j+1}^{\alpha})x_j^{\beta}+(x_{j+1}^{\alpha}-x_j^{\alpha})x_{j-1}^{\beta},\\
\eta&=(x_{j+1}^{\alpha}-x_j^{\alpha})x_{j+2}^{\beta}+(x_j^{\alpha}-x_{j+2}^{\alpha})x_{j+1}^{\beta}+(x_{j+2}^{\alpha}-x_{j+1}^{\alpha})x_j^{\beta}.
\end{aligned}$$

Тогда при $x\in[x_0,\ x_m)$

$$u(x)=\widetilde{u}(x),\ \textit{если}\ u(x)=1,\ 1/x^{\alpha},\ 1/x^{\beta}.$$

При $\alpha=1$, $\beta=2$, погрешность приближения может быть подсчитана формуле:

$$|\tilde{u}(x)-u(x)|\le\frac{1}{40}\ \left\|\frac{6}{x^2}u'+\frac{6}{x}u''+u'''\right\|_{[x_{j-1},\ x_{j+1}]}\left(\ \left|\frac{x^5-6x_j^5+15x_j^4x-10x_j^3x^2}{3x^2}\right|+\right.$$

$$+\sum_{k=j-1,j+1}\left|\frac{T_0(k)}{3x_k^2}\left(6x^5-x_k^5-15x^4x_k+10x^3x_k^2\right)+\right.$$

$$\left.+T_1(k)\frac{x_k^5-5x_j^4x_k+4x_j^5}{x_k^3}\right|\cdot|\omega_k(x)|,$$

а на равномерной сетке узлов $\{x_j\}$ с шагом h: $0<x_0<x_1<\ldots$,

$$|\tilde{u}(x)-u(x)|\le h^3\left[\frac{5}{24}+h\frac{x_0+0.3h}{48x_0^2}\right]\ \left\|\frac{6}{x^2}u'+\frac{6}{x}u''+u'''\right\|_{[x_{j-1},\ x_{j+1}]}.$$

Здесь же построены мультипликативные базисные сплайны по системам функций $1,\ x,\ 1/x$ и $1,\ 1/x,\ 1/x^2$.

4. В четвертой главе рассмотрены непрерывные и дважды непрерывно дифференцируемые сплайны третьего порядка, обладающие свойством точности на функциях 1, x, e^{Ax}, e^{-Ax}, $A>0$.

Получены непрерывные сплайны третьего порядка, обладающие свойством точности на функциях 1, x, e^{Ax}, e^{-Ax}, $A>0$, позволяющие решать интерполяционную задачу Лагранжа.

Теорема 11 . *Пусть сетка узлов* $\{x_j\}$ *равномерная с шагом* h, $u\in C^4(a,\ b)$, *и приближение* $\widetilde{u}(x)$ *задается формулами*

$$\tilde{u}(x)=\sum_{k=j-1}^{j+2}u(x_j)\omega_j(x),\quad x\in[x_j,\ x_{j+1}]$$

где при обозначении $\lambda:=e^{Ah}$, $t=(x-x_j)/(x_{j+1}-x_j)$

$$\omega_{j-1}(t)=\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}(t-1)+\frac{\lambda^3}{(\lambda+1)(\lambda-1)^3}(\lambda^{-t}-\lambda^{(t-2)}),$$

$$\omega_j(t) = -\frac{\lambda^2+\lambda+1}{(\lambda-1)^2}t + \frac{(\lambda+2)\lambda^{(1+t)}}{(\lambda+1)(\lambda-1)^3} - \frac{(2\lambda+1)\lambda^{(2-t)}}{(\lambda+1)(\lambda-1)^3} + \frac{\lambda^2+1}{(\lambda-1)^2},$$

$$\omega_{j+1}(t) = \frac{\lambda^2+\lambda+1}{(\lambda-1)^2}t - \frac{(2\lambda+1)\lambda^{(1+t)}}{(\lambda+1)(\lambda-1)^3} + \frac{(\lambda+2)\lambda^{(2-t)}}{(\lambda+1)(\lambda-1)^3} - \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2},$$

$$\omega_{j+2}(t) = -\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}t + \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)(\lambda-1)^3}(\lambda^t - \lambda^{-t}).$$

Тогда

$$u(x) = \widetilde{u}(x), \text{ если } u(x) = 1,\ x,\ e^{Ax},\ e^{-Ax},$$

и справедлива следующая оценка:

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq \frac{1}{2A^4}\ \left\|u^{\mathrm{IV}} - A^2u''\right\|_{[x_{j-1},\ x_{j+2}]} \Big[2(e^{Ah}+e^{-Ah}) - 2A^2h^2 - 4 +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{27}(-5A^2h^2 - 4 + e^{Ah} + e^{-Ah} + e^{2Ah} + e^{-2Ah})\Big].$$

Далее получены дважды непрерывно дифференцируемые базисные сплайны минимального дефекта, обладающие свойством точности на функциях 1, x, e^{Ax}, e^{-Ax}, $A > 0$. Рассматриваются задачи интерполяции следующего вида:

$$\widetilde{u}(x_s) - T_1(h)\widetilde{u}'(x_s) + T_2(h)\widetilde{u}''(x_s) = u(x_s) - T_1(h)u'(x_s) + T_2(h)u''(x_s),$$

$$s = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

где

$$a)\ \widetilde{u}(x) = \sum_{k=j-2}^{j+1} \left(u(x_k) + T_1(h)u'(x_k) + T_2(h)u''(x_k)\right)\omega_k(x), \tag{12}$$

$$T_1(h) = h, \quad T_2(h) = \frac{Ah(1+e^{2Ah}) + 1 - e^{2Ah}}{A^2(e^{2Ah}-1)}. \tag{13}$$

$$b)\ \widetilde{u}(x) = \sum_{k=j-1}^{j+2} \left(u(x_k) + T_1(h)u'(x_k) + T_2(h)u''(x_k)\right)\omega_k(x),$$

$$T_1(h) = 0, \quad T_2(h) = \frac{2Ahe^{Ah} + 1 - e^{2Ah}}{A^2(e^{2Ah}-1)}.$$

$$c)\ \widetilde{u}(x) = \sum_{k=j}^{j+3} \left(u(x_k) + T_1(h)u'(x_k) + T_2(h)u''(x_k)\right)\omega_k(x),$$

$$T_1(h) = h, \quad T_2(h) = \frac{2Ahe^{Ah} + 1 - e^{2Ah}}{A^2(e^{2Ah}-1)}.$$

Теорема 12 . *Пусть сетка узлов $\{x_j\}$ равномерная с шагом h, приближение $\widetilde{u}(x)$ к функции $u(x)$ задается выражением*

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{k=j-2}^{j+1} \left(u(x_k) + T_1(h)u'(x_k) + T_2(h)u''(x_k)\right)\omega_k(x),$$

где коэффициенты $T_1(h)$, $T_2(h)$ ищем в виде (13), а базисные сплайны — по формулам

$$\omega_{j-2}(x) = \frac{e^{2Ah} - e^{2Ax} + 2Ae^{2A(x+h)}(x-h)}{2Ahe^{Ax}(e^{Ah}-1)^2},$$

$$\omega_{j-1}(x) = -\frac{1}{2Ahe^{Ax}(e^{Ah}-1)^2}\left(e^{Ah} - e^{A(2x+h)} + 2Ae^{A(x+2h)}(x-h) + \right.$$
$$\left. +2(e^{2Ah} - e^{2Ax}) + 2Ae^{Ax}(x - h + xe^{Ah})\right),$$

$$\omega_j(x) = -\frac{1}{2Ahe^{Ax}(e^{Ah}-1)^2}\left(e^{2Ax} - e^{2Ah} + 2Ae^{A(x+h)}(h-x) + \right.$$
$$\left. +2e^{Ah}(e^{2Ax}-1) - 2Axe^{Ax}(1+e^{2Ah})\right),$$

$$\omega_{j+1}(x) = \frac{e^{2Ax} - 2Axe^{Ax} - 1}{2Ahe^{A(x-h)}(e^{Ah}-1)^2}.$$

Тогда

$$u(x) = \widetilde{u}(x), \text{ если } u(x) = 1,\ x,\ e^{Ax},\ e^{-Ax},$$

причем $\omega_j \in C^2(a,b)$.

Здесь же построены мультипликативные базисные сплайны по этой же системе функций.

Заключают работу два Приложения. Первое содержит численные эксперименты и графики некоторых базисных функций, второе — тексты программ.

Список опубликованных работ по теме диссертации

[1] **Бурова И.Г., Демина А.Ф.** Построение приближений с особенностью в нуле//Методы вычислений. Вып. 21: Сб. статей / Под редакцией В.М. Рябова - СПб.: Издательство С.-Петербургского государственного университета, 2005 г., с. 20-31.

[2] **Бурова И.Г., Демина А.Ф.** Построение приближений с особенностью в нуле на неравномерной сетке. ДЕП в ВИНИТИ №220 В2005 от 15 февраля 2005 г., 10 с.

[3] **Демина А.Ф.** О длительности вычисления приближений функций с особенностью гладкими сплайнами. Proceedings International conference in memory of V.I.Zubov. "Stability and Control Processes". 29.06-1.07.2005. SPb. V.2. p 808-815.

[4] **Бурова И.Г., Демина А.Ф.** О гладких сплайнах с заданным свойством точности//Материалы XXXVII международной научной конференции аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость", 11-13 апреля 2006 г., СПб., с.113-115.

[5] **Бурова И.Г., Демина А.Ф.** О построении гладких интерполяционных сплайнов//Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 1. С. 88-95.