Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Дыбкова Елизавета Владимировна

Подгруппы гиперболических унитарных групп

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2006

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Вавилов Николай Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Гордеев Николай Леонидович
	доктор физико-математических наук, профессор Койбаев Владимир Амурханович
	доктор физико-математических наук, профессор Романовский Николай Семенович
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Защита состоится 20 сентября 2006 г. в 16 час. на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., д.28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. А.М.Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 191011, Университетская наб., д.7/9.

Защита будет проходить в Петербургском отделении Математического института имени В.А.Стеклова РАН по адресу: Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, д.27.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.232.29
доктор физ.-мат. наук, профессор

В.М.Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Линейные группы — традиционный объект исследования математиков. Различные вопросы, связанные с их структурой, изучались К.Жорданом, Л.Диксоном, Б.ван дер Варденом, Г.Вейлем, Ж.Дьедонне и их многочисленными последователями в огромном количестве работ. Ко второй половине XX века сложилось несколько крупных направлений исследования линейных групп. Укажем некоторые из них.

По традиции в первую очередь интерес вызывают нормальные подгруппы. Центральный результат в этой области получен Х.Бассом, описавшим на стабильном уровне строение нормальных делителей полной линейной группы над кольцами. Для нестабильной ситуации над коммутативными и близким к ним кольцами аналоги результата Басса были позднее получены в работах А.А.Суслина, Дж.Уилсона, А.З.Голубчика и некоторых других авторов. Различные вопросы, связанные с нормальным строением, рассматривались также Л.Н.Васерштейном, А.В.Михалевым, З.И.Боревичем, Н.А.Вавиловым, Э.Абе, Ли Фуанем и многими другими.

Значительное число работ посвящено рассмотрению изоморфизмов и автоморфизмов классических групп — в последние десятилетия важные результаты в этой области получены О.Т.О'Мирой, А.Ханом, А.В.Михалевым, И.З.Голубчиком, Е.И.Зельмановым, В.М.Петечуком и др.. Предметом постоянного интереса является описание линейных групп с помощью образующих и определяющих соотношений — особое внимание к этому вопросу было стимулировано работами 60-х годов Р.Стейнберга и Дж.Милнора. Ряд авторов рассматривает подгруппы, определяемые в теоретико-групповых терминах, — абелевы, разрешимые, нильпотентные, силовские и т.д.; основные достижения в этой области принадлежат Дж.Диксону, Б.Верфрицу, Д.А.Супруненко, В.П.Платонову, А.Е.Залесскому и другим алгебраистам минской школы. Продолжают привлекать внимание подгруппы, порожденные элементами определенного вида (отражениями, псевдоотражениями, квадратичными унипотентами и т.д.), а также инвариантамиэтих групп; за последние годы выдающиеся результаты в этом направлении получены А.Вагнером, А.Е.Залесским, В.Н.Сережкиным, У.Хаффманом, Д.Уэйлзом, К.Ватанабе, Н.Л.Гордеевым, Дж.Томпсоном, Ф.Тиммесфельдом, А.Коэном, Н.А.Вавиловым и др..

Еще один важный аспект в исследовании линейных групп связан с изучением решетки $\mathrm{Lat}(G_0, G)$ подгрупп группы G, содержащих некоторую выделенную подгруппу G_0, — такую задачу обычно называют *описанием промежуточных подгрупп.* Интерес к этой задаче тесно соприкасается с проектом классификации максимальных подгрупп конечных простых групп, в течение последних десятилетий находящемся в центре внимания ведущих специалистов — Г.Зейца, М.Либека, Я.Саксла, А.Коэна, Д.Тестерман и очень многих других. Особенно бурно этот раздел теории конечных групп развивается после появления ставшей уже классической работы М.Ашбахера, где было доказано, что каждая максимальная подгруппа конечной линейной группы либо принадлежит одному из описанных классов $\mathbf{C_1}$—$\mathbf{C_8}$, либо является почти простой группой в некотором абсолютно неприводимом представлении. Для линейных групп над конечным полем вопросу о том, какие именно подгруппы из классов Ашбахера являются максимальными, были посвящены десятки работ, опирающиеся на классификационные теоремы для конечных простых групп; полностью эта проблема была решена П.Клейдманом и М.Либеком. Для бесконечных полей, а также для разных типов колец группы из классов $\mathbf{C_1}$—$\mathbf{C_8}$ достаточно велики, хотя совершенно не обязательно максимальны, и проблема описания решетки промежуточных подгрупп, когда в качестве G_0 берется либо группа из самого класса Ашбахера, либо группа, описываемая какой-то комбинацией этих классов, представляется весьма актуальной.

Различные вопросы, связанные с описанием решетки промежуточных подгрупп в контексте классов Ашбахера, рассматривались во многих сотнях работ, авторами которых являются как специалисты по конечным группам (Г.Зейц, У.Кантор, Р.Дай, Д.Тестерман и многие другие), так и алгебраисты, основные интересы которых не ограничены рамками конечных полей, — сошлемся здесь на работы Ж.Титса, А.Бореля, Д.Дьоковича, В.П.Платонова, К.Судзуки, Ли Шанчжи, Н.С.Романовского, Р.А.Шмидта, А.В.Степанова, Ли Фуаня и многих других авторов. Совершенно не касаясь здесь вопросов, связанных с остальными классами Ашбахера (эти вопросы довольно подробно освещены во вводном разделе диссертации), остановимся чуть подробнее на проблеме описания надгрупп расщепимого максимального тора — проблеме, ассоциированной с суммой классов $\mathbf{C_1} + \mathbf{C_2}$. Основной результат представляемой работы относится именно к этому направлению изучения линейных групп.

Для групп Шевалле над алгебраически замкнутым полем K описание промежуточных подгрупп рассматриваемого типа с использованием методов алгебраической геометрии было получено А.Борелем и Ж.Титсом: если G_0 — расщепимый максимальный тор группы $G = \mathrm{G}(\Phi, K)$, то для каждой подгруппы H решетки $\mathrm{Lat}(G, G_0)$ существует такое единственное замкнутое подмножество $S \subseteq \Phi$, что выполняются включения

$$\mathrm{G}(S) \leq H \leq \mathrm{N}(S),$$

где под $\mathrm{G}(S)$ понимается подгруппа, порожденная тором G_0 и всеми корневыми элементами $x_\alpha(\xi)$ при $\alpha \in S$ и $\xi \in K$, а под $\mathrm{N}(S)$ — нормализатор $\mathrm{G}(S)$ в группе G. Такая специфическая классификация классификация весьма обычна при описании промежуточных подгрупп — удобно называть ее стандартной, говоря при этом, что подгруппы $\mathrm{G}(S)$ служат ее базисом.

Позднее Г.Зейц доказал, что описание Бореля–Титса решетки надгрупп максимального (и не обязательно расщепимого) тора справедливо также в том случае, когда K — конечное поле, содержащее не менее 13 элементов, а характеристика этого поля отлична от 2. Следует сказать, что доказательство Зейца существенно опирается и на конечность поля, и на нечетность характеристики.

При переносе теоремы Бореля–Титса на другие поля и кольца в работах разных авторов возник и далее стал общеупотребительным подход, связанный с рассмотрением особых матриц из идеалов и соответствующих им подгрупп — сетей идеалов и сетевых подгрупп, как они стали называться в работах З.И.Боревича и его учеников ленинградской-петербургской школы. Как частные случаи работы большинства упомянутых ниже авторов включают в себя алгебраически замкнутые и конечные поля, но техника доказательства в них совершенно отлична, конечно, от методов алгебраической геометрии и теории конечных групп. З.И.Боревич доказал, что если K — произвольное поле, содержащее не менее 7 элементов, то решетка надгрупп диагональной группы $\mathrm{D}(n, K)$ в $\mathrm{GL}(n, K)$ допускает стандартное описание, базисом которого служат D-сетевые подгруппы $\mathrm{G}(\sigma)$. Для маленьких полей это не так, однако, как показали З.И.Боревич и В.А.Койбаев, для полей, состоящих из 4 или 5 элементов, имеет место аналог стандартного описания решетки $\mathrm{Lat}(\mathrm{D}(n, K), \mathrm{GL}(n, K))$, если D-сети снабдить некоторым уточняющим параметром. В дальнейшем З.И.Боревич и Н.А.Вавилов доказали, что решетка $\mathrm{Lat}(\mathrm{D}(n, R), \mathrm{GL}(n, R))$ описывается стандартно и для большинства полулокальных колец R (не обязательно даже коммутативных).

Позднее описание надгрупп расщепимых максимальных торов переносилось на другие матричные группы и группы Шевалле в работах Н.А.Вавилова, моих, В.А.Койбаева, Ли Шанчжи, О.Кинга, С.Л.Крупецкого, Е.Б.Плоткина, Б.С.Хая, Е.А.Филипповой и других авторов. При этом обнаружилось, что практически во всех случаях для получения описания решетки промежуточных подгрупп, которое естественно называть стандартным, множество рассматриваемых сетей следует ограничивать и/или снабжать его каким-то уточняющим параметром.

В представляемой работе мы обобщаем сразу несколько из упомянутых здесь результатов для четномерных расщепимых классических линейных групп. Следует сказать, что техника, развитая для групп Шевалле и использованная в ряде работ по классификации подгрупп линейных групп, связана с двумя неприятными обстоятельствами. Во-первых, довольно часто описание решетки промежуточных подгрупп над коммутативными кольцами и даже полями с необратимой 2 вызывает большие технические трудности, которые в некоторых ситуациях вообще не могут быть преодолены. Вторая неприятность — неприменимость аппарата линейных алгебраических групп к группам над некоммутативными кольцами. Избежать эти две сложности позволяет обращение к гиперболическим унитарным группам, позволяющим рассматривать в рамках единого подхода сразу несколько типов классических линейных групп и над некоммутативными кольцами, и над кольцами с необратимой 2.

Таким образом, вопросы, рассматриваемые в диссертационной работе, тесно связаны с общим развитием структурной теории линейных групп. Это и определяет актуальность темы диссертации.

Цель работы. Основной целью работы является построение стандартного описания решетки надгрупп диагональной группы в гиперболической унитарной группе над произвольным телом вне зависимости от коммутативности и характеристики. В рамках этой задачи требуется разработать технику работы с матрицами из четномерных классических групп. В этом же контексте следует построить аналог теории сетевых подгрупп, применимый одновременно к симплектическим, ортогональным и унитарным группам.

Методы исследований. Используются традиционные методы теории линейных групп над полями, телами и кольцами, метод исследования подгрупп линейных групп при помощи сетей идеалов, техника работы с форменными кольцами, методы теории алгебр с инволюцией и теории некоммутативных тел. Применяются также общие теоретико-групповые и теоретико-кольцевые методы.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

- развита техника работы с гиперболическими унитарными группами, связанная с их нечетномерным представлением;
- для произвольного кольца естественным образом определен аналог сети идеалов и форменного идеала (форменная сеть), описаны соответствующие этому аналогу подгруппы гиперболических унитарных групп и установлены основные свойства таких подгрупп;
- доказано, что для достаточно большого тела с инволюцией каждая надгруппа диагональной группы заключена между надэлементарной подгруппой, соответствующей однозначно определенной точной форменной сети, и ее нормализатором в гиперболической унитарной группе;
- вычислена факторгруппа $\mathrm{N}_{\mathrm{U}}(\sigma, \Gamma)/\,\mathrm{U}_0(\sigma, \Gamma)$, соответствующая точной форменной сети;
- в совокупности полученные результаты полностью описывают решетку надгрупп диагональной группы в гиперболической унитарной группе над телом.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Введенные в ней понятия, развитые методы и полученные результаты применимы при исследовании структуры линейных групп и групп Шевалле над различными классами колец. Вспомогательные утверждения, доказанные в работе, применимы для изучения некоммутативных тел. Материал, изложенный в диссертации, может быть использован при чтении специальных курсов по линейным и классическим группам.

Апробация работы. Результаты, полученные в представляемой работе, докладывались на Международных алгебраических конференциях, посвященных памяти Д.К.Фаддеева (Санкт-Петербург, 1997) и З.И.Боревича (Санкт-Петербург, 2002), на Международной конференции по K-теории и теории групп (Билефельд, ФРГ, 1997). Неоднократно результаты докладывались также на петербургском городском алгебраическом семинаре Д.К.Фаддеева.

Публикации. Практически все полученные в диссертации результаты опубликованы в работах [1]–[9].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав (содержащих в общей сложности 25 параграфов) и списка литературы, насчитывающего 206 наименований. Общий объем работы — 182 страницы текста.

Содержание диссертации

Во **введении** мы освещаем историю вопроса, приводя уже имеющиеся результаты разных авторов в рассматриваемой области и определяя место представляемой работы в общем ряду исследований. Во вводной части описывается также конструкция основного текста диссертации.

Первая глава работы отведена определениям форменного кольца и гиперболической унитарной группы над ним.

В начале § 1 мы напоминаем определение форменного кольца. Предположим, что R — ассоциативное кольцо с 1, в котором действует антиавтоморфизм $\widehat{\ }$. Следуя С.Т.С.Уоллу, мы называем этот антиавтоморфизм *обобщенной инволюцией*, если для некоторого обратимого λ из R выполняются условия

$$\widehat{\lambda}\lambda = 1 \qquad \text{и} \qquad \widehat{\widehat{\alpha}} = \lambda\alpha\lambda^{-1} \quad \text{при всех } \alpha \in R.$$

Элемент λ мы фиксируем, называя его далее *определяющим скаляром* для взятой обобщенной инволюции. Описанная ситуация выделяет в R аддитивные группы

$$\Lambda^m = \{\alpha - \widehat{\alpha}\lambda \mid \alpha \in R\} \qquad \text{и} \qquad \Lambda^M = \{\alpha \in R \mid \alpha = -\widehat{\alpha}\lambda\},$$

причем $\Lambda^m \leq \Lambda^M$. *Форменный параметр* Λ кольца R — это промежуточная подгруппа ($\Lambda^m \leq \Lambda \leq \Lambda^M$), для которой $\widehat{\alpha}\Lambda\alpha \leq \Lambda$ при всех $\alpha \in R$, а *форменное кольцо* над R — это пара (R, Λ).

Обе подгруппы Λ^m и Λ^M (Э.Бак обозначает эти группы $\Lambda_{\min}$ и $\Lambda_{\max}$, соответственно, но мы предпочитаем место нижнего индекса оставлять свободным для других целей) сами являются форменными параметрами — минимальным и максимальным, соответственно. Если на факторгруппе Λ^M/Λ^m ввести структуру правого R-модуля, положив

$$(\alpha + \Lambda^m)\,\beta = \widehat{\beta}\alpha\beta + \Lambda^m,$$

то множество всех форменных параметров нашего кольца, связанных с данной обобщенной инволюцией и определяющим ее скаляром, окажется в биективном соответствии с множеством всех подмодулей этого модуля.

Форменный параметр кольца с обобщенной инволюцией иногда определен однозначно — например, Λ^m совпадает с Λ^M, если в центре $Z = Z(R)$ кольца R существует такой элемент ν, что сумма $\nu + \widehat{\nu}$ обратима. В частности, форменный параметр однозначно определяется обобщенной инволюцией и λ, если 2 — обратимый элемент кольца R. Таким образом, если R — тело (именно такое кольцо представляет для нас особый интерес в представляемой работе), то форменный параметр определен однозначно, когда характеристика тела отлична от 2 или когда обобщенная инволюция изменяет хотя бы один элемент центра рассматриваемого тела.

Далее в § 1 мы описываем процедуру скэйлинга (масштабирования), играющую важную роль в последующих разделах работы. Она состоит в замене действующей на R обобщенной инволюции и, соответственно, форменного параметра Λ кольца R : при фиксированном β из мультипликативной группы R^* обратимых элементов кольца R равенство

$$\check{\alpha} = \beta\widehat{\alpha}\beta^{-1} \qquad \text{для любого } \alpha \in R$$

задает новую обобщенную инволюцию $\check{}$ с новым определяющим скаляром $\lambda' = \beta\widehat{\beta}^{-1}\lambda$ и подгруппу $\Lambda' = \beta\Lambda$, которая является форменным параметром R относительно новой обобщенной инволюции; в этой ситуации принято говорить, что новая обобщенная инволюция получена скэйлингом старой, а новое форменное кольцо (R, Λ') — скэйлингом старого форменного кольца (R, Λ) с помощью β. В случае тела скэйлинг позволяет превратить форменное кольцо (R, Λ) в *нормализованное*, то есть считать форменный параметр нулевым или содержащим 1, определяющий скаляр λ — равным ± 1, а обобщенную инволюцию — обычной инволюцией, то есть антиавтоморфизмом с тождественным квадратом. В § 1 мы описываем нормализованные форменные кольца над телами, отмечая, что при фиксированной инволюции форменный параметр Λ может быть определен неоднозначно только в том случае, когда тело имеет характеристику 2, а на центре этого тела инволюция действует тождественно (другими словами, если рассматривается тело характеристики 2 с инволюцией первого рода; поле характеристики 2 с тождественной инволюцией можно считать примером такого тела). В описанной ситуации минимальным форменным параметром Λ^m является аддитивная группа $\operatorname{Tr} R$ следов, а максимальным форменным параметром Λ^M — аддитивная группа R^0 элементов, неподвижных при действии инволюции. В связи с тем, что эти две группы чрезвычайно важны при рассмотрении форменных колец над телами, мы здесь же приводим несколько их важных свойств (предложения 1.1 – 1.5), ссылаясь на соответствующие результаты Ж.Дьедонне, Ли Шанчжи и У.Пендера. Для инволюции первого рода на теле характеристики 2 мы говорим также о ее типе, применяя терминологию, употребляемую обычно в связи с конечномерными центральными простыми алгебрами: инволюция имеет *симплектический тип*, если 1 является следом, или *ортогональный тип* — в противном случае. Мы отмечаем (предложение 1.6), что для произвольного тела характеристики 2 тип инволюции, возникающей после скэйлинга, определяется принадлежностью скэйлингующего элемента группе следов. Потребность в определении типа инволюции диктуется тем, что в ряде доказательств утверждений из третьей главы нам нужно иметь достаточно большую группу $\mathcal{U}(R) = \left\{\theta \in R \mid \theta\bar{\theta} = 1\right\}$ унитарных элементов тела.

Заключительная часть § 1 первой главы посвящена арифметике некоммутативного тела с инволюцией, используемой в дальнейшем. В частности, чрезвычайно важную роль в рассуждениях третьей главы играют уравнения вида

$$\alpha\,(\theta - 1)\,\beta + \bar{\theta}^{-1} - 1 = 0, \tag{1}$$

где α и β — некоторые ненулевые элементы тела R. Следует сказать, что вообще решение уравнений в некоммутативном теле — вопрос чрезвычайно сложный даже в том случае, когда речь идет о корнях *многочлена* с коэффициентами из тела. Более того, обсуждение вопроса о существовании в теле решений простейшего уравнения вида

$$ax - xb = c \tag{2}$$

(такого рода уравнение, называемое иногда уравнением Сильвестра, в качестве вспомогательного может возникать при рассмотрении нашего уравнения (1)) имеет многолетнюю историю, но в общем случае *необходимые и достаточные* условия разрешимости (2) до сих пор неизвестны — подробности обсуждения этого вопроса можно найти в монографии П.Кона. Таким образом, для произвольного тела мы не знаем необходимых и достаточных условий на коэффициенты, при которых уравнение (1) имеет хотя бы одно обратимое решение $\theta \neq 1$ (нетривиальное решение). Поэтому в отдельное утверждение мы выделяем известную нам информацию по этому поводу:

Предложение 1.9. 1) *Если R — поле, то*

a) *при* $\alpha\beta+1=0$ *все элементы группы* $\mathcal{U}(R)$ *и только они служат решениями уравнения* (1);

b) *при* $\alpha\beta+1\neq 0$ *нетривиальное решение уравнения* (1) *существует тогда и только тогда, когда*

$$\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}\neq 1,$$

и в этом случае

$$\theta=\frac{1+(\alpha\beta)^{-1}}{1+\bar{\alpha}\bar{\beta}}$$

— единственное нетривиальное решение рассматриваемого уравнения.

2) *Если* R *— некоммутативное тело, то*

a) *при* $\alpha\beta+1=0$ *уравнение* (1) *имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда*

$$\alpha\in\operatorname{Tr}R \qquad \text{или} \qquad \alpha\neq\bar{\alpha},$$

причем в случае выполнения любого из этих условий указанное уравнение имеет бесконечно много решений;

b) *при* $\alpha\bar{\beta}+1=0$ *и* $\alpha\neq\bar{\alpha}$ *нетривиальных решений уравнение* (1) *не имеет.*

Еще несколько утверждений, имеющих отношение к арифметике некоммутативного тела с инволюцией, содержатся в тексте третьей главы; их формулировки весьма специфичны и используются только в доказательствах следующих за ними свойств подгрупп гиперболической унитарной группы.

Определение гиперболической унитарной группы обсуждается в § 2 первой главы. В начале параграфа мы описываем эту группу как группу изометрий свободного гиперболического квадратичного модуля над заданным форменным кольцом, а затем переходим на матричный язык. В связи с этим вторым определением (именно оно используется в представляемой работе) отметим два обстоятельства. Во-первых, для индексации строк и столбцов рассматриваемых матриц четного порядка $2n$ мы используем множество

$$\Omega=\{1,2,\dots,n,-n,\dots,-2,-1\}.$$

Вторая особенность приводимого здесь определения состоит в том, что мы отказываемся от традиционного рассмотрения блочной записи обратимой матрицы четного порядка и аддитивной группы Λ-антиэрмитовых матриц, а связываем с матрицей столбец высоты $2n$, компоненты которого являются просто вычисляемыми функциями элементов данной матрицы: если для обратимой матрицы

$a = (a_{ij})$ порядка $2n$ элементы обратной матрицы обозначить a'_{ij}, то i-ая компонента столбца, связываемого с матрицей a, — это сумма

$$S_{i,-i}(a) = \sum_{l>0} a_{il} a'_{l,-l}\,,$$

которую мы называем i-ой *характеристической суммой* матрицы a. Сформулируем получающееся за счет этого новшества более простое определение матричной гиперболической унитарной группы с использованием следующих обозначений: для произвольного индекса i из Ω через $\varepsilon(i)$ мы обозначаем знак этого индекса

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} 1 & \text{при } i > 0, \\ -1 & \text{при } i < 0, \end{cases}$$

а под Λ_i понимаем аддитивную группу

$$\Lambda_i = \lambda^{-\frac{\varepsilon(i)+1}{2}} \Lambda = \begin{cases} \Lambda & \text{при } i < 0 \text{ и} \\ \lambda^{-1}\Lambda & \text{при } i > 0. \end{cases}$$

Определение. *Пусть* (R, Λ) *— форменное кольцо над кольцом* R. **Гиперболическая унитарная группа** $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ *степени* $2n$ *над этим форменным кольцом — это группа всех таких обратимых матриц* a *порядка* $2n$ *с элементами из* R, *для которых при всех индексах из* Ω *выполняются условия*

$$a'_{ij} = \lambda^{-\frac{\varepsilon(i)+1}{2}} \widehat{a}_{-j,-i} \lambda^{\frac{\varepsilon(j)+1}{2}} \qquad \text{и} \qquad S_{i,-i}(a) \in \Lambda_i.$$

Как и в предыдущем параграфе, особое внимание мы уделяем гиперболическим унитарным группам для форменных колец над телами. В частности, цитируя фрагмент монографии А.Хана и О.Т.О'Миры, для нормализованного случая мы приводим перечень гиперболических унитарных групп с указанием классической линейной группы, совпадающей с $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ для соответствующего форменного кольца (тривиальность инволюции автоматически означает, что R — поле):

1) если инволюция тривиальна, $\lambda = -1$ и $\Lambda = \Lambda^M = R$, то $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ — симплектическая группа;

2) при тривиальной инволюции, $\lambda = 1$ и $\Lambda = \Lambda^m = 0$ группа $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ — это ортогональная группа, соответствующая невырожденной квадратичной форме индекса Витта n (гиперболическая ортогональная группа);

3) при тривиальной инволюции, $\lambda = -1 = 1$ и $0 \lneqq \Lambda \lneqq R$ для поля характеристики 2 группа $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ канонически изоморфна ортогональной группе

для дефектной и невырожденной в смысле Дьедонне квадратичной формы — по этой причине в описанной ситуации группу $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ называют дефектной ортогональной группой;

4) при нетривиальной инволюции, $\lambda = -1$ и $\Lambda = \Lambda^M = R^0$ группа $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ — это классическая унитарная группа;

5) при нетривиальной инволюции, $\lambda = -1$ и $\Lambda \neq R^0$ (последнее означает, что R — некоммутативное тело характеристики 2) группу $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ называют ограниченной классической унитарной группой (группы такого типа рассматривались в работах Э.Сейп-Хорникс, Ж.Титса и Ф.Брюа).

Дальнейшее развитие для тел в § 2 получает и идея сопоставления унитарной матрице ее характеристических сумм. Рассматривая факторгруппу

$$V = R^0 / \operatorname{Tr} R$$

как левое векторное пространство над телом R относительно умножения

$$\alpha\,(\beta + \operatorname{Tr} R) = \alpha\beta\bar{\alpha} + \operatorname{Tr} R \qquad \text{при } \alpha \in R \text{ и } \beta \in R^0,$$

матрице a из группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ и каждому индексу i мы сопоставляем вектор $v_i(a) = S_{i,-i}(a) + \operatorname{Tr} R$ пространства V, называя этот вектор i-ым *присоединенным вектором* данной матрицы, и составляем столбец

$$v(a) = \begin{pmatrix} v_1(a) \\ \dots \\ v_{-1}(a) \end{pmatrix}$$

— *присоединенный столбец* матрицы a. Важное свойство присоединенных столбцов, связанное с групповой структурой $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$, устанавливается следующим утверждением:

Предложение 1.13. *Если (R, Λ) — нормализованное форменное кольцо над телом с инволюцией R, а a и b — две матрицы из группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$, то*

$$v(ab) = v(a) + av(b) \qquad \text{и} \qquad v(a) = av\left(a^{-1}\right).$$

Это предложение позволяет представлять себе элементы группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ в виде матриц порядка $2n+1$, записанных в форме

$$\begin{pmatrix} a & v(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

и умножаемых по обычному матричному правилу.

Заканчивает первую главу коротенький § 3, где описываются простейшие матрицы из группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$. К этим матрицам мы относим *элементарные диагональные унитарные матрицы*

$$D_i(\theta) = e + (\theta - 1)e_{ii} + \lambda^{\frac{\varepsilon(i)-1}{2}} \left(\widehat{\theta} - 1\right) \lambda^{\frac{1-\varepsilon(i)}{2}} e_{-i,-i} \quad \text{при } \theta \in R^*$$

и унитарные трансвекции двух типов: матрицы

$$T_{i,-i}(\alpha) = e + \alpha e_{i,-i} \quad \text{при } \alpha \in \Lambda_i,$$

называемые далее *унитарными трансвекциями длинного корневого типа*, и матрицы

$$T_{ij}(\beta) = e + \beta e_{ij} - \lambda^{\frac{\varepsilon(j)-1}{2}} \widehat{\beta} \lambda^{\frac{1-\varepsilon(i)}{2}} e_{-j,-i} \quad \text{при } \beta \in R \text{ и } i \neq \pm j$$

— *унитарные трансвекции короткого корневого типа* (для произвольной пары индексов i и j через e_{ij} обозначена соответствующая матричная единица, то есть матрица, у которой позиция (i, j) занята 1, а все остальные места заполнены нулями). Для удобства дальнейших ссылок приведены соотношения между простейшими унитарными матрицами.

Во **второй главе** диссертации рассматривается и модифицируется идея описания подгрупп линейной группы с помощью специальных матриц из идеалов соответствующего кольца. Такой подход к изучению решетки подгрупп в разные времена фигурировал в работах многих авторов; в предлагаемом здесь тексте мы берем за основу терминологию З.И.Боревича. В § 1 мы напоминаем ключевые определения сети идеалов и сетевой подгруппы полной линейной группы, а затем формулируем в этих терминах основные результаты З.И.Боревича и Н.А.Вавилова по описанию в полной линейной группе ее решетки подгрупп, содержащих все диагональные обратимые матрицы, для поля и для полулокального кольца. В § 1 цитируется также довольно много других фактов, связанных с полной линейной группой, поскольку далее в представляемой диссертации нам приходится иметь дело с аналогичными вещами в контексте рассмотрения гиперболической унитарной группы. В конце § 1 мы делаем важное замечание о ситуации, когда даже для случая полной линейной группы (над маленьким полем) сети идеалов не описывают всю решетку наддиагональных подгрупп: как показали З.И.Боревич и В.А.Койбаев, за основу описания решетки наддиагональных подгрупп полной линейной группы над некоторыми маленькими полями можно брать сети идеалов с некоторым дополнительным параметром. Эту идею мы в дальнейшем используем при исследовании решетки наддиагональных подгрупп гиперболической унитарной группы.

В следующем § 2 второй главы мы рассматриваем сетевые подгруппы гиперболической унитарной группы: для сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ идеалов кольца R порядка

$2n$ сетевая подгруппа $\mathrm{U}(\sigma)$ группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ определяется как пересечение $\mathrm{U}(\sigma) = \mathrm{G}(\sigma) \cap \mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$, где $\mathrm{G}(\sigma)$ — обычная сетевая подгруппа в $\mathrm{GL}(2n, R)$. С каждой D-сетью порядка $2n$ мы связываем также элементарную сетевую подгруппу $\mathrm{EU}(\sigma)$, определяя ее как подгруппу, порожденную всеми содержащимися в $\mathrm{U}(\sigma)$ унитарными трансвекциями, и надэлементарную сетевую подгруппу $\mathrm{U}_0(\sigma)$, получающуюся добавлением к $\mathrm{EU}(\sigma)$ всех диагональных унитарных матриц.

С целью исключения заведомой неинъективности отображения $\sigma \mapsto \mathrm{U}(\sigma)$ мы сразу сужаем класс рассматриваемых сетей, ограничиваясь только *унитарными сетями*, то есть сетями с дополнительным ограничением

$$\sigma_{ij} = \widehat{\sigma_{-j,-i}} \quad \text{при всех индексах}$$

(аналогичное условие фигурировало ранее в наших работах с Н.А.Вавиловым по симплектическим и гиперболическим ортогональным группам). К сожалению, и это ограничение не делает отображение $\sigma \mapsto \mathrm{U}(\sigma)$ инъективным даже для случая, когда R — поле: мы приводим пример с тремя различными унитарными D-сетями второго порядка, описывающими одну и ту же сетевую подгруппу. По этой причине класс рассматриваемых D-сетей мы ограничиваем еще одним условием

$$\sigma_{i,-i} = \sum_{k \neq \pm i} \sigma_{ik}\sigma_{k,-i} + \langle \sigma_{i,-i} \cap \Lambda_i \rangle \qquad \text{при всех индексах } i,$$

называя унитарные D-сети, обладающие таким свойством, *точными* (этого же рода ограничение ранее вводил и Н.А.Вавилов при использовании сетей идеалов для изучения гиперболической ортогональной группы). Следует оговориться, что точные сети описывают не все D-сетевые подгруппы гиперболической унитарной группы (мы приводим в § 2 соответствующий пример); однако, каждая элементарная или надэлементарная D-сетевая подгруппа гиперболической унитарной группы соответствует однозначно определенной точной сети.

Далее в § 2 мы рассматриваем подгруппу симметрической группы S_{2n}, элементы которой при естественном действии на множестве сетей порядка $2n$ переводят каждую унитарную сеть снова в унитарную, что означает для подстановок из этой подгруппы выполнение условия

$$\pi(-i) = -\pi(i)$$

при всех индексах. Заимствуя терминологию, употребляемую в связи с системами корней, мы называем описанную группу подстановок *группой Вейля* и обозначаем ее W_n . В предыдущем параграфе мы говорили, что если π — произвольный элемент симметрической группы, а σ — любая сеть соответствующего порядка, то сетевые подгруппы $\mathrm{G}(\sigma)$ и $\mathrm{G}(\sigma^\pi)$ сопряжены в полной линейной группе с помощью мономиальной матрицы p_π, и указывали явный вид такой матрицы. В § 2 мы отмечаем, что даже если π принадлежит группе Вейля, описанная в § 1 матрица p_π может и не входить в группу $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$. В предложении 2.9 мы показываем, что тем не менее аналог соответствующего утверждения из предыдущего параграфа справедлив и для гиперболической унитарной группы: если σ — произвольная унитарная D-сеть порядка $2n$, а π — любая подстановка из группы Вейля, то выполняется равенство

$$\mathrm{U}(\sigma^\pi) = P_\pi^{-1}\, \mathrm{U}(\sigma) P_\pi$$

для некоторой мономиальной матрицы P_π из $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$; такую матрицу P_π мы выписываем в явной форме и отмечаем, что аналогичные равенства справедливы также для элементарных и надэлементарных сетевых подгрупп. Далее мы описываем наиболее просто устроенные (*канонические*) унитарные D-сети над простым кольцом, содержащиеся в каждой орбите относительно действия группы Вейля; доказательство того, что любая орбита содержит некоторую каноническую сеть (предложение 2.10), мы опустили, поскольку оно весьма объемно и идейно практически ничем не отличается от доказательства теоремы 3 из нашей старой работы о симплектической группе. Завершает § 2 небольшое, но важное для дальнейшего замечание о поведении сетевых подгрупп гиперболической унитарной группы при скэйлинге форменного кольца (предложение 2.11).

Идеологически следующий § 3 занимает центральное место во второй главе: в нем точные сети дополняются параметром, позволяющим описывать все наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы над телом; отметим (хотя этот вопрос в диссертации не рассматривается), что весьма правдоподобной кажется и возможность описания с помощью таких расширенных сетей решетки наддиагональных подгрупп группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ для более сложно устроенных колец R.

Если в свое время главная конгруэнцподгруппа полной линейной группы, соответствующая одному идеалу кольца, послужила для З.И.Боревича отправной точкой при определении сети и сетевой подгруппы, то в нашей ситуации с гиперболической унитарной группой эту роль исполнило понятие форменного идеала форменного кольца, введенное Э.Баком. Напомним, что форменным идеалом форменного кольца (R, Λ) называется пара $(\mathfrak{a}, \Gamma)$, состоящая из идеала $\mathfrak{a}$ кольца R, инвариантного относительно антиавтоморфизма $\widehat{\ }$, и аддитивной подгруппы Γ кольца R, содержащейся в пересечении $\mathfrak{a} \cap \Lambda$ и содержащей все разности $\alpha - \widehat{\alpha}\lambda$ для $\alpha \in \mathfrak{a}$, а также все произведения $\widehat{\alpha}\beta\alpha$ при $\alpha \in \mathfrak{a}$ и $\beta \in \Lambda$. Каждому форменному идеалу соответствует нормальная подгруппа гиперболической унитарной группы, и в этом смысле форменный идеал является точным аналогом обычного идеала по отношению к группе $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$. Сетевой аналог форменного идеала мы определяем следующим образом.

Определение. *Пусть* (R, Λ) *— форменное кольцо над* R *и* $\sigma = (\sigma_{ij})$ *— унитарная сеть порядка* $2n$. *Для каждого индекса* i *выделим две аддитивные группы*

$$\Gamma_i^m = \Big\{\alpha - \lambda^{-\frac{\varepsilon(i)+1}{2}} \widehat{\alpha} \lambda^{\frac{1-\varepsilon(i)}{2}} \mid \alpha \in \sigma_{i,-i}\Big\} \qquad \text{и} \qquad \Gamma_i^M = \sigma_{i,-i} \cap \Lambda_i$$

(*первая из них содержится во второй*), *возьмем промежуточную подгруппу* Γ_i $(\Gamma_i^m \le \Gamma_i \le \Gamma_i^M)$ *и составим из этих подгрупп столбец*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \dots \\ \Gamma_{-1} \end{pmatrix}$$

высоты $2n$. *Такой столбец мы называем* **набором форменных сетевых параметров** *сети* σ, *если для произвольных индексов* i *и* j *выполняются включения*

$$\alpha \Gamma_j \lambda^{\frac{\varepsilon(j)-1}{2}} \widehat{\alpha} \lambda^{\frac{1-\varepsilon(i)}{2}} \le \Gamma_i \quad \text{при всех } \alpha \in \delta_{ij} + \sigma_{ij}$$

(*как обычно, под* δ_{ij} *понимается символ Кронекера*). *Пару* (σ, Γ) *из унитарной сети и какого-либо набора ее форменных сетевых параметров мы называем* **форменной сетью** *над форменным кольцом* (R, Λ).

Приводя, разумеется, несколько примеров форменных сетей (в частности, показывая, что форменный идеал в определенном смысле можно считать специальным случаем форменной сети), далее мы описываем подгруппу группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$, определяемую форменной сетью, причем используем для этого понятие характеристической суммы унитарной матрицы, введенное в первой главе: подгруппу

$$\mathrm{U}(\sigma, \Gamma) = \{a \in \mathrm{U}(\sigma) \mid S_{i,-i}(a) \in \Gamma_i \quad \text{при каждом индексе } i\}$$

мы называем *форменной сетевой подгруппой* для форменной сети (σ, Γ) (то, что описанное множество $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$ действительно является подгруппой, мы доказываем в предложении 2.12 с использованием установленных в первой главе свойств характеристических сумм). В частном случае, когда форменная сеть соответствует форменному идеалу, ее форменная сетевая подгруппа совпадает с описываемой этим форменным идеалом нормальной подгруппой группы $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$. Еще одним подтверждением полезности введенных понятий служит пример, приведенный в нашей с Н.А.Вавиловым работы о симплектической группе над полем: говоря там о необходимости введения ограничения $\operatorname{char} R \neq 2$ для того, чтобы решетку наддиагональных подгрупп симплектической группы над полем R можно было описать с помощью обычных сетевых подгрупп, мы указали конкретную наддиагональную подгруппу для поля характеристики 2, не укладывающуюся в рамки такого описания. Эта подгруппа является форменной сетевой в смысле приведенного выше определения.

Обсуждаются в § 3 и аналоги других понятий, о которых шла речь в предыдущих параграфах этой главы: поведение форменной сетевой подгруппы при скэйлинге форменного кольца, определение элементарной $\mathrm{EU}(\sigma,\Gamma)$ и надэлементарной $\mathrm{U}_0(\sigma,\Gamma)$ подгрупп, соответствующих форменной D-сети, точность форменной сети. Как и в предыдущих разделах, особое внимание мы уделяем нормализованным форменным кольцам над телами. Если в этом случае для форменного кольца (R,Λ) форменный параметр Λ — ненулевой и σ — унитарная D-сеть, то для индекса i форменный сетевой параметр Γ_i может быть ненулевым только при $\sigma_{i,-i}=R$. В такой ситуации Γ_i содержит $\operatorname{Tr}R=\Gamma_i^m$, а факторгруппа $V_i=\Gamma_i/\operatorname{Tr}R$ может рассматриваться как подпространство пространства $V=R^0/\operatorname{Tr}R$, о котором мы говорили в § 1 первой главы. Это значит, что задание набора форменных сетевых параметров в указанной ситуации эквивалентно заданию серии подпространств пространства V, соответствующих единичным идеалам сети, стоящим на ее побочной диагонали. В таком контексте сформулированное в определении набора форменных сетевых параметров условие имеет следующий смысл: если идеал σ_{ij} — единичный, то подпространство V_j содержится в подпространстве V_i. Несколько иначе можно описать также матрицы a из $\mathrm{U}(\sigma)$, входящие в форменную D-сетевую подгруппу $\mathrm{U}(\sigma,\Gamma)$: для них должны выполняться условия

$$S_{i,-i}(a)=0 \quad \text{при } \sigma_{i,-i}=0 \qquad \text{и} \qquad v_i(a)\in V_i \quad \text{при } \sigma_{i,-i}=R,$$

где под $v_i(a)$ понимается i-ый присоединенный вектор матрицы a.

В заключение § 3 мы формулируем центральную теорему работы; при этом под $\mathrm{N}_{\mathrm{U}}(\sigma,\Gamma)$ понимается нормализатор форменной сетевой подгруппы $\mathrm{U}(\sigma,\Gamma)$ в гиперболической унитарной группе $\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)$.

Основная теорема. *Пусть (R,Λ) форменное кольцо над телом R, удовлетворяющее следующим ограничениям:*

1) *R отлично от полей $\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_3,\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_5$ при $\Lambda=0$,*

2) *$R\neq\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_3,\mathbb{F}_4,\mathbb{F}_5,\mathbb{F}_7,\mathbb{F}_9,\mathbb{F}_{11}$ при $\Lambda=R$,*

3) *$R\neq\mathbb{F}_4,\mathbb{F}_9,\mathbb{F}_{25}$ при $0\lneqq\Lambda\lneqq R$.*

Тогда для произвольного натурального числа n и для любой наддиагональной подгруппы H группы $\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)$ существует единственная точная форменная сеть (σ,Γ) порядка $2n$ над форменным кольцом (R,Λ), удовлетворяющая включениям

$$\mathrm{U}_0(\sigma,\Gamma)\leq H\leq \mathrm{N}_{\mathrm{U}}(\sigma,\Gamma).$$

Справедливость этой теоремы ранее была установлена только для тривиальной инволюции в нескольких частных случаях: при $n = 1$ и $\Lambda = R$ это было доказано О.Кингом для полей произвольной характеристики, а для любого n и полей характеристики $\neq 2$ — Н.А.Вавиловым и мною в симплектическом случае и Н.А.Вавиловым — в гиперболическом ортогональном.

В следующем § 4 второй главы мы определяем действие группы Вейля на множестве форменных сетей и проверяем (предложение 2.15), что для форменных D-сетей, принадлежащих одной орбите, соответствующие им форменные сетевые подгруппы сопряжены с помощью мономиальной унитарной матрицы, которую мы описали в § 2. Кроме того, в предложении 2.16 мы показываем, что если (σ, Γ) — точная форменная сеть, а матрица P_π подстановки π из группы Вейля нормализует группу $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$, то π не меняет данную форменную сеть.

Начиная с § 5 второй главы и имея в виду доказательство основной теоремы, мы ограничиваемся рассмотрением точных форменных сетей над телами и соответствующих им подгрупп. Прежде всего мы описываем систему образующих форменной сетевой подгруппы.

Предложение 2.18. *Для произвольной точной форменной сети* (σ, Γ) *над* (R, Λ) *группа* $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$ *порождается следующими матрицами:*

1) *элементарными диагональными унитарными матрицами* $D_i(\theta)$ *при обратимых* θ *из* R;

2) *унитарными трансвекциями короткого типа* $T_{ij}(\alpha)$ *при* $\alpha \in \sigma_{ij}$ *для случая* $i \neq \pm j$;

3) *унитарными трансвекциями длинного типа* $T_{i,-i}(\beta)$ *при* $\beta \in \Gamma_i$;

4) *элементарными симметриями* T_i *при* $\Gamma_i = 0$, *если* $\sigma_{i,-i} = \sigma_{-i,i} = R$.

Под элементарной симметрией T_i, о которой говорится в последнем пункте сформулированного предложения, мы понимаем матрицу p_π транспозиции $\pi = (i, -i)$, принадлежащую группе $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ в ситуации, когда R — поле, $\widehat{\ }$ — его тождественный автоморфизм и $\lambda = 1$. Иными словами, образующие четвертого типа, которые заменяют отсутствующие в группе $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$ нетривиальные унитарные трансвекции длинного типа $T_{i,-i}(\beta)$ и $T_{-i,i}(\beta)$, могут фигурировать в описанной системе порождающих только в тех случаях, когда $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$ содержится либо в гиперболической ортогональной группе над полем произвольной характеристики, либо в симплектической группе над полем характеристики 2. Продолжая приведенный в § 3 первой главы список соотношений между простейшими унитарными матрицами, мы указываем здесь же соотношения, связывающие элементарные диагональные матрицы и унитарные трансвекции с элементарными симметриями.

Доказательству предложения 2.18 предшествуют три вспомогательных утверждения. Первое из них (предложение 2.17) констатирует важное свойство точных форменных сетей: если для некоторого индекса i оба идеала $\sigma_{i,-i}$ и $\sigma_{-i,i}$ — единичные, а форменные сетевые параметры $\Gamma_i = \Gamma_{-i}$ — нулевые, то для какого-то $j \neq \pm i$ мы имеем $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = R$. Два других утверждения (леммы 2.19 и 2.20) связаны с разложением группы $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$ на двойные смежные классы по подгруппе $\mathrm{U}_0(\sigma, \Gamma)$.

Для большинства точных форменных сетей группа $\mathrm{U}_0(\sigma, \Gamma)$ совпадает с $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$ (следствие 2.21). Если же это не так, то, как мы показываем в предложении 2.22, группа $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$ раскладывается в полупрямое произведение своей нормальной подгруппы $\mathrm{U}_0(\sigma, \Gamma)$ и элементарной абелевой группы мономиальных матриц $T(\sigma, \Gamma)$, порядок которой мы описываем в терминах эквивалентности, задаваемой сетью σ на множестве Ω (отметим, что при $\operatorname{char} R = 2$ в доказательстве предложения 2.22 используется инвариант Диксона).

В § 6 второй главы мы рассматриваем сопряжение форменной сетевой подгруппы унитарной матрицей и при этом у нас возникает первое ограничение на размер тела R. В предложении 2.23 устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых подгруппа, сопряженная с форменной сетевой, содержится в другой форменной сетевой подгруппе. Как следствие этого утверждения мы получаем важный для доказательства основной теоремы критерий принадлежности унитарной матрицы нормализатору форменной сетевой подгруппы:

Предложение 2.24. *Пусть (R, Λ) — форменное кольцо над телом R, содержащим не менее 5 элементов, (σ, Γ) — точная форменная сеть порядка $2n$ над (R, Λ) и a — некоторая матрица из $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$. Для того, чтобы a принадлежала группе $\mathrm{N}_{\mathrm{U}}(\sigma, \Gamma)$, необходимо и достаточно выполнения при всех индексах следующих трех условий:*

1) $a_{ik}\sigma_{kl}a'_{lj} \leq \sigma_{ij}$;

2) $a_{ik}\Gamma_k a'_{-k,-i} \leq \Gamma_i$;

3) $a_{ik}S_{k,-k}(a^{-1})a'_{-k,-i} \in \Gamma_i$.

В конце § 6 (предложение 2.26) мы уточняем вид матрицы, сопряжение которой переводит одну форменную сетевую подгруппу в другую, а в заключительном § 7 второй главы мы показываем (предложение 2.27), что для точной форменной сети группа $\mathrm{N}_{\mathrm{U}}(\sigma, \Gamma)$ совпадает с нормализатором надэлементарной форменной сетевой подгруппы, и описываем (предложение 2.28) факторгруппу $\mathrm{N}_{\mathrm{U}}(\sigma, \Gamma)/\,\mathrm{U}_0(\sigma, \Gamma)$ в терминах подстановок из группы Вейля.

Вся **третья глава** диссертации посвящена доказательству основной теоремы (по этой причине большинство утверждений этой главы названы леммами) и содержит весьма длинные вычисления. Перечислим основные этапы доказательства.

Мы начинаем с замечания, что теорему достаточно доказать только для нормализованных форменных колец над телами (соответствующая переформулировка названа в тексте теоремой 3.1). В § 1 мы показываем (предложение 3.3), что для каждой наддиагональной подгруппы H точная форменная сеть, удовлетворяющая заключению теоремы, может существовать только одна; доказательство основано на том, что нормализатор форменной сетевой подгруппы не может содержать больше унитарных трансвекций, чем $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$ (предложение 3.2). В следующем § 2 мы строим наибольшую точную форменную сеть (σ, Γ), для которой $\mathrm{U}_0(\sigma, \Gamma) \leq H$, называя такую форменную сеть ассоциированной с наддиагональной подгруппой H :

$$\sigma_{ij} = \{\alpha \in R \mid T_{ij}(\alpha) \in H\} \quad \text{при } i \neq \pm j,$$

$$\Gamma_i = \{\beta \in \Lambda \mid T_{i,-i}(\beta) \in H\},$$

$$\sigma_{i,-i} = \sum_{k \neq \pm i} \sigma_{ik}\sigma_{k,-i} + \langle \Gamma_i \rangle \quad \text{и} \quad \sigma_{ii} = R.$$

Как видно, собственно описание σ_{ij} и Γ_i просто и естественно, несколько сложнее *доказать*, что сконструированные объекты составляют форменную сеть. Основная трудность состоит в доказательстве включений $\alpha\beta\alpha \in \Gamma_i$ при $\alpha \in \Gamma_i$ и $\beta \in \Gamma_{-i}$ — здесь мы сначала показываем, что достаточно рассматривать матрицы второго порядка над телом характеристики 2, а затем используем идею О.Кинга из второй части его замечательной работы о специальной линейной группе второй степени над произвольным полем.

Все последующие параграфы третьей главы — доказательство того, что для ассоциированной форменной сети справедливо включение $H \leq \mathrm{N_U}(\sigma, \Gamma)$. Мы применяем индукцию по степени рассматриваемой группы, для чего, разумеется, следует прежде всего разобраться с матрицами второго порядка. Этому посвящен § 3, где в случае тривиальной инволюции на поле мы вновь используем результаты О.Кинга.

При доказательстве включения $H \leq \mathrm{N_U}(\sigma, \Gamma)$ для групп степени ≥ 4 мы намереваемся использовать предложение 2.24 (критерий включения унитарной матрицы в нормализатор форменной сетевой подгруппы), показывая, что если наддиагональная подгруппа содержит немономиальную матрицу, то она содержит соответствующие ей нетривиальные унитарные трансвекции. Доказательство таких включений мы начинаем с рассмотрения в § 4 матриц, у которых в некоторой строке только один (диагональный) элемент является обратимым.

Лемма 3.8. *Предположим, что тело R содержит не менее четырех элементов, из которых не менее трех инвариантны относительно инволюции.*

Если для принадлежащей группе H матрицы a выполняется условие

$$a_{rj} = 0 \quad \textit{при некотором фиксированном индексе } r \textit{ и любых } j \neq r,$$

то $a_{ir} \in \sigma_{ir}$ *для каждого* $i \neq \pm r$ *и* $S_{-r,r}(a^{-1}) \in \Gamma_{-r}$.

Рассмотрение матриц, удовлетворяющих описанному условию (матриц с почти нулевой строкой, как мы называем их в тексте диссертации), — совершенно традиционное начало работы по извлечению трансвекций в наддиагональной подгруппе. С другой стороны, в свое время в нашей с Н.А.Вавиловым работе о симплектической группе при рассмотрении матрицы с почти нулевой строкой мы говорили об извлечении трансвекций только короткого типа. В известном смысле именно на утверждении леммы 3.8 об унитарных трансвекциях длинного типа базируется доказательство основной теоремы в случаях, когда форменный параметр тела не определяется обобщенной инволюцией однозначно.

В следующих двух параграфах третьей главы (эти параграфы связаны с весьма объемными вычислениями) лемма 3.8 существенно усиливается: мы показываем, что наддиагональная подгруппа содержит большое количество нетривиальных унитарных трансвекций обоих типов, если в этой подгруппе найдется такая матрица, что хотя бы один ее элемент равен нулю, а среди остальных элементов довольно много обратимых. Итогом продолжительных рассуждений § 5 и § 6 является утверждение, названное в работе *основной леммой для матрицы с нулевым элементом* (отметим, что для ее доказательства в § 6 существенно используется индукционное предположение о справедливости основной теоремы для групп меньшей степени):

Лемма 3.12. *Если матрица a из подгруппы H имеет хотя бы один нулевой элемент, то для произвольного индекса l справедливы включения*

1) $a_{il}a'_{lj} \in \sigma_{ij}$ *при всех* $i \neq \pm j$ и

2) $a_{il}S_{l,-l}(a^{-1})a'_{-l,-i} \in \Gamma_i$ *при всех* i.

В § 7, опираясь на основную лемму для матрицы с нулевым элементом, мы доказываем включение $H \leq \mathrm{N_U}(\sigma, \Gamma)$ для некоторых наддиагональных подгрупп, а для оставшихся сводим доказательство к поиску в H какой-нибудь нетривиальной унитарной трансвекции короткого типа:

Предложение 3.14. *Если подгруппа H удовлетворяет хотя бы одному из следующих двух условий*

1) *каждая матрица из H содержит нулевой элемент или*

2) *H содержит какую-то нетривиальную унитарную трансвекцию короткого типа,*

то $H \leq \mathrm{N_U}(\sigma, \Gamma)$.

Таким образом, далее нам предстоит доказать, что если в наддиагональной подгруппе H содержится некоторая матрица, не имеющая нулевых элементов, то в теле R существует такой единственный форменный параметр Λ', что H либо совпадает с гиперболической унитарной группой $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda')$, либо имеет в этой группе индекс 2 (последняя ситуация может реализоваться только в том случае, когда H — подгруппа гиперболической унитарной группы над полем произвольной характеристики или подгруппа симплектической группы над полем характеристики 2).

Идею леммы 3.12 мы фактически продолжаем развивать в § 8: каждую характеристическую сумму унитарной матрицы можно считать ее *обобщенным элементом*, и в § 8 мы рассматриваем ситуацию, когда одна из таких сумм для не содержащей нулевых элементов матрицы равна нулю. В лемме 3.15 мы доказываем, что описанное условие на входящую в наддиагональную подгруппу H матрицу является достаточным для включения $H \leq \mathrm{N_U}(\sigma, \Gamma)$ (далее подгруппы, удовлетворяющие такому включению, мы называем *стандартными*). Непосредственным следствием леммы 3.15 является справедливость основной теоремы для форменных колец с нулевым форменным параметром:

Предложение 3.16. *Все наддиагональные подгруппы гиперболической ортогональной группы стандартны, если R — поле, содержащее не менее 7 элементов.*

Техника доказательства в предыдущих параграфах этой главы в большинстве случаев опирается на сопряжение некоторой элементарной диагональной унитарной матрицы при помощи матрицы, принадлежащей взятой наддиагональной подгруппе, и нахождение такого нетривиального обратимого параметра, от которого зависит диагональная матрица, что получается матрица с нулевыми элементами. Эту идею мы делаем более отчетливой в § 9, где доказываем следующее утверждение:

Лемма 3.21. *Пусть a — не содержащая нулей матрица из наддиагональной подгруппы H. Если для некоторого обратимого $\theta \neq 1$ и некоторого индекса l матрица $b(\theta) = aD_l(\theta)a^{-1}$ содержит нулевой элемент, то H — стандартная подгруппа.*

Кроме этого результата, позволяющего, в частности, не рассматривать далее наддиагональные подгруппы симплектической группы над полем характеристики $\neq 2$ (в этой группе условие леммы 3.21 выполняется для любой матрицы a при $\theta = -1$), § 9 содержит утверждение (предложение 3.20), означающее, что контрпример к основной теореме (если он существует) был бы весьма специфичным: такая подгруппа должна содержать матрицы только двух сортов — мономиальные и не содержащие нулевых элементов. Отметим также еще один доказанный в § 9 факт, благодаря которому действующую на теле инволюцию далее можно считать нетождественной:

Предложение 3.22. *Пусть a — не содержащая нулей матрица из наддиагональной подгруппы H. Если для фиксированного индекса l все произведения $\mu_i = a_{i,-l}^{-1}a_{il}$ принадлежат группе R^0 при любых i, то подгруппа H стандартна. В частности, если R — поле с тривиальной инволюцией, то все наддиагональные подгруппы группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ стандартны.*

Используя результаты § 9, в следующем десятом параграфе мы завершаем доказательство основной теоремы в случае, когда R — поле: здесь мы опираемся на предложение 1.9, где для коммутативного случая были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1), а также описаны сами решения такого уравнения. Если бы нам были известны аналогичные факты, касающиеся некоммутативного тела, то этим девятым параграфом мы могли бы завершить и всю работу.

Считая далее тело R некоммутативным, в § 11 мы вновь рассматриваем матрицу с нулевым обобщенным элементом, обращаясь на этот раз к представлению (3). Здесь мы получаем еще один признак стандартности наддиагональной подгруппы, позволяющий в дальнейшем считать, что R — некоммутативное тело характеристики 2 с инволюцией первого рода:

Лемма 3.27. *Если не содержащая нулевых элементов матрица a принадлежит подгруппе H, причем для некоторого индекса r присоединенный вектор $v_r(a)$ равен нулю, то подгруппа H стандартна.*

В следующем § 12 мы рассматриваем новую возможную особенность унитарной матрицы, связанную с ее подматрицами второго порядка. Понимая определитель матрицы с элементами из некоммутативного тела в смысле Дьедонне, мы говорим о нулевых или ненулевых минорах второго порядка

$$\Delta_{ij}^{kl}(a) = \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{vmatrix}$$

для произвольной четверки индексов i, j, k, l и устанавливаем новый критерий стандартности наддиагональной подгруппы:

Лемма 3.32. *Если наддиагональная подгруппа H содержит матрицу a, все элементы которой обратимы, причем для некоторой четверки индексов $i \neq \pm j$ и $k \neq l$ минор $\Delta_{ij}^{kl}(a)$ равен нулю, то H — стандартная подгруппа.*

Далее в § 13 мы устанавливаем аналог леммы 3.32 в связи с представлением (3) унитарной матрицы. При этом для матрицы a, не содержащей нулевых элементов, мы вводим понятие ее *псевдоминора*, понимая под ним вектор

$$\Delta_{ij}^{k}(a) = a_{ik}^{-1}v_i(a) - a_{jk}^{-1}v_j(a).$$

С использованием этого нового понятия мы формулируем и доказываем последнюю лемму третьей главы:

Лемма 3.34. *Подгруппа H стандартна, если она содержит такую не имеющую нулевых элементов матрицу a, что для некоторых индексов $i \neq \pm j$ псевдоминор $\Delta_{ij}^{-i}(a)$ равен нулю.*

Доказательство основной теоремы завершается в § 14, где используются и лемма 3.34, и ранее установленные признаки стандартности наддиагональной подгруппы. Довольно длинные вычисления, используемые в § 14, несколько облегчены тем, что характеристика рассматриваемого тела предполагается равной 2. В последнем § 15 третьей главы мы объясняем, почему ограничения на форменные кольца в формулировке теоремы не могут быть ослаблены, и приводим соответствующие контрпримеры.

В заключение скажем еще несколько слов о технике доказательств большинства утверждений третьей главы. Достаточно объемные вычисления в них связаны в первую очередь с возможной (а во многих случаях — даже предполагаемой) некоммутативностью рассматриваемого тела. Как уже говорилось, § 9 посвящен рассмотрению ситуации, когда для некоторого обратимого $\theta \neq 1$, какого-то индекса l и унитарной матрицы a, не содержащей нулей, по крайней мере один нулевой элемент имеет матрица $aD_l(\theta)a^{-1}$. Помимо сопряжения с помощью матрицы a элементарной диагональной матрицы $D_l(\theta)$ в разных местах доказательств лемм третьей главы рассматривается сопряжение посредством a более сложных унитарных диагональных матриц — матриц $D(\theta) = \prod\limits_{l>0} D_l(\theta)$, $D(\theta)D_p(\eta)$, $D_p(\theta)D_q(\eta)$, $D_p(\theta)D_q(\eta)D_r(\kappa)$, $D_p(\theta)D_q(\eta)D(\kappa)$ и даже $\prod\limits_{l>0} D_l(\theta_l)$ (все это, повторим еще раз, связано с вычислениями в некоммутативном теле). Основной инструмент в соответствующих выкладках — рассмотрение централизаторов относительно простых элементов и использование большого числа унитарных элементов тела. В связи с последним обстоятельством мы предпочитаем на некоммутативном теле характеристики 2 иметь дело либо с инволюцией второго рода, либо с инволюцией первого рода, имеющей симплектический тип. Это вынуждает нас при использовании скэйлинга (а скэйлинг для относительного упрощения вычислений приходится применять весьма часто) брать в качестве скэйлингующего элемента только ненулевые следы, которые, как правило, нецентральны. Подчеркнем еще раз, что наша основная теорема справедлива для произвольного некоммутативного тела. Поскольку тело не обязано быть конечно порожденным над своим центром, в нашей ситуации центр тела может быть очень мал (например, содержать всего два элемента); это же обстоятельство не дает возможности использовать в полной мере традиционные методы работы в простых центральных алгебрах с инволюцией, для которых стандартным предположением является конечномерность над центром. Таким образом, все, что имелось в нашем распоряжении для соответствующих выкладок, — это весьма скудные факты по общей теории некоммутативных тел, к которым мы добавили еще несколько довольно специфичных утверждений типа уже упоминавшегося предложения 1.9.

Работы автора по теме диссертации

[1] Е. В. Дыбкова, *О подгруппах унитарной гиперболической группы над полем характеристики* $\neq 2$. — Междунар. конф. памяти Д.К.Фаддеева. СПб, 1997. Тез. докл., 193–194.

[2] Е. В. Дыбкова, *Определение форменной сетевой подгруппы в унитарной гиперболической группе.* — Междунар. конф. памяти Д.К.Фаддеева. СПб, 1997. Тез. докл., 195–196.

[3] Е. В. Дыбкова, *О сетевых подгруппах в гиперболической унитарной группе.* — Алгебра и анализ, 9:4 (1997), 79–86.

[4] Е. В. Дыбкова, *О сопряженности сетевых подгрупп в гиперболической унитарной группе над полем.* — Вестн. С.-Петербург. ун-та, Сер.1, 1997, № 22, 10–12.

[5] Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над полем.* — Зап. научн.семин. ПОМИ, 236 (1997), 87–96.

[6] Е. В. Дыбкова, *Форменные сети и решетка наддиагональных подгрупп симплектической группы над полем характеристики 2.* — Алгебра и анализ, 10:4 (1998), 113–129.

[7] Е. В. Дыбкова, *О наддиагональных подгруппах гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом.* — Зап. научн.семин. ПОМИ, 289 (2002), 154–206.

[8] Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над некоммутативным телом.* — Зап. научн.семин. ПОМИ, 305 (2003), 121–135.

[9] Е. В. Дыбкова, *Теорема Боревича для гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом.* — Зап. научн.семин. ПОМИ, 321 (2005), 136–167.