САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Башкиров Евгений Леонидович

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ НАД ТЕЛАМИ, СОДЕРЖАЩИЕ ПОДГРУППЫ КВАДРАТИЧНЫХ УНИПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

01.01.06. — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2006

Работа выполнена в
Белорусском государственном университете информатики радиоэлектроники

Официальные оппоненты —
доктор физ.-мат. наук, профессор Вавилов Николай Александрович
доктор физ.-мат. наук, профессор Койбаев Владимир Амурханович
доктор физ.-мат. наук, профессор Кондратьев Анатолий Семенович

Ведущая организация —
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита состоится "___"_________ 2006 г. в____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт–Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28.

Защита будет проходить в Петербургском отделении Математического им. В. А. Стеклова по по адресу: Санкт–Петербург, наб. реки Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького СПбГУ по адресу: Санкт–Петербург, Университетская набережная., д. 7/9.

Автореферат разослан "___"_________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.232.29
д. ф.-м. наук, профессор В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. Теория линейных групп является одним из основных направлений в современной алгебре, чрезвычайно обширным, интенсивно развивающимся, и имеющем многочисленные точки соприкосновения с различными разделами как собственно математики, так и естествознания в целом. Фактическую сердцевину этой теории составляет изучение подгруппового строения линейных групп над ассоциативными кольцами различной степени общности. Возникнув в XIX веке как частная задача о конечных матричных группах, исходящая из потребностей теории Галуа, проблема описания и классификации подгрупп в заданных линейных группах, пройдя через многие этапы своего становления и развития, превратилась в обширную ветвь математического знания, обладающую своими собственными языком и проблематикой. Естественно, что получение описания всех мыслимых линейных групп над различными кольцами малореально, и потому постановка проблемы в такой чрезвычайно широкой общности представляется совершенно непродуктивной. В связи с этим для получения существенных результатов на изучаемые матричные группы и на ассоциативные кольца, над которыми эти группы определены, приходится налагать, различные условия, характеризующие эти группы и кольца с различных сторон. Наложение таких ограничений приводит к расщеплению предмета изучения подгруппового строения на множество разделов и ответвлений, тесно между собой переплетенных и взаимодействующих.

Одним из наиболее важных обстоятельств, способствовавших становлению и развитию учения о подгрупповом строении линейных групп, явилось обнаружение того факта, что это строение в значительной мере определяется некоторыми элементами (матрицами) специального вида, содержащимися в рассматриваемых группах. Первым примером подобного рода было, вероятно, осознание значения наличия простейших унипотентных элементов (трансвекций), в полной линейной группе конечной степени над полем при описании нормальных делителей этой группы (теорема Жордана-Диксона). Указанное выше обстоятельство стимулировало активные поиски в матричных группах тех матриц, которые в той или иной степени ответственны за строение этих групп. Выявление таких матриц, в свою очередь, привело к созданию различных методов распознавания матричных групп, исходя из вида содержащихся в них отдельных матриц, с целью последующей классификации этих групп и отождествления их с группами из известных и уже изученных классов. С другой стороны, наличие в некоторых важных (в том числе и для приложений) и представляющих интерес для исследований линейных группах элементов, определяющих свойства и строение этих групп, естественно приводит к постановке, до некоторой степени, обратной проблемы классификации линейных групп, которые содержат эти элементы или ими порождаются. Данная проблема очень трудна, и результаты, идущие в направлении ее решения, получены только при сильных ограничениях на рассматриваемые группы и их элементы. Вместе с тем, значение результатов такого рода весьма велико, поскольку они способствуют более ясному пониманию как структуры уже известных групп, так и обнаружению новых классов линейных групп, представляющих интерес для дальнейшего изучения. Известно, в частности, что многие наиболее важные линейные группы (например, классические) порождаются содержащимися в них унипотентными элементами. Поэтому класс линейных групп, содержащих или порожденных унипотентными элементами особенно интересен и нуждается в изучении. Этот класс, а также группы Шевалле, порожденные различными содержащимися в них подгруппами унипотентных элементов, привлекали к себе в течение длительного времени внимание многих авторов (см., например, [4], [5],

[12], [13], [16], [18], [20]–[22], [24], [26], [30], [32], [33], [34], [35], [44] [46], [47], [48]). Однако результаты этих и других работ, посвященных этой тематике, были получены при весьма жестких ограничениях. Поэтому о линейных группах, содержащих некоторую фиксированную группу унипотентных матриц известно в общем случае сравнительно немного, и кроме того, отсутствует связное и последовательное изложение данного предмета. Именно в это направление теории линейных групп входит направление настоящей диссертации. В ней разрабатывается техника обращения с унипотентными элементами в линейных группах, и на основе этой техники создаются методы изучения линейных групп над различными ассоциативными телами. Отметим, что описание линейных групп, содержащих фиксированную линейную группу, является весьма плодотворным методом изучения подгруппового строения линейных групп, причем наиболее важным и интересным представляется здесь случай, когда фиксированная подгруппа состоит только из полупростых или только из унипотентных матриц. Результаты, относящиеся к этим двум, тесно связанным между собой направлениям, составляют содержание большого самостоятельного раздела теории линейных групп. Исходя из методики получения результатов, настоящая диссертация может быть отнесена ко второму из этих направлений. Что же касается первого, то здесь за последние 30 лет трудами З. И. Боревича и его последователей Н. А. Вавилова, В. А. Койбаева, Е. В. Дыбковой и др. была разработана глубокая и весьма разветвленная теория линейных групп, содержащих подгруппу диагональных матриц. Именно это является еще одной причиной, по которой в фокусе данной диссертационной работы находятся вопросы теории линейных групп, связанные с наличием в этих группах унипотентных элементов. Создание техники и методов, относящихся ко всей совокупности унипотентных матриц, естественно, невозможно, и это обстоятельство вынуждает специализировать рассматриваемые унипотентные элементы. Один из способов такой специализации, дающий возможность проникнуть в предмет достаточно глубоко, и тем самым определяющий направление и рамки исследований, содержащихся в диссертации, состоит в следующем.

Пусть R — ассоциативное тело, n, r — целые числа такие, что $n \geq 2, 0 < r \leq [\frac{n}{2}]$, и пусть k — подтело тела R. Квадратичной унипотентной k-подгруппой вычета r группы $GL_n(R)$ будем называть любую подгруппу группы $GL_n(R)$, сопряженную в $GL_n(R)$ с группой, состоящей из всех матриц

$$\operatorname{diag}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{r\text{ раз}}, 1, \ldots, 1\Big),\ a \in k.$$

Всякий элемент из $GL_n(R)$, содержащийся в некоторой квадратичной унипотентной k-подгруппе вычета r группы $GL_n(R)$, будем называть квадратичным унипотентным элементом вычета r группы $GL_n(R)$. Квадратичный унипотентный элемент вычета 1 (соответственно 2) называется трансвекцией (соответственно длинным корневым элементом), а соответствующая ему квадратичная унипотентная подгруппа называется корневой k-подгруппой (соответственно длинной корневой k-подгруппой). Трансвекции являются, по-видимому, наиболее изученными из всех унипотентных элементов что, впрочем, весьма естественнно, ибо класс линейных групп, содержащих трансвекции, включает в себя наиболее важные классические группы. В случае, если R является конечным полем, А. Е. Залесский и В. Н. Сережкин [12] перечислили все неприводимые подгруппы группы $GL_n(R)$ степени $n \geq 2$, содержащие трансвекцию. Для бесконечного поля R получение подобного перечисления представляется маловероятным, и потому в этом случае целесообразно ограничиться изучением линейных групп, содержащих корневую k-подгруппу, где k — подполе поля R. Первый шаг в этом направлении сделал

Дж. Маклафлин [33], который классифицировал неприводимые подгруппы группы $GL_n(R)$, порожденные корневыми R-подгруппами. Д. А. Супруненко [15] частично распространил результат Маклафлина на линейные группы над произвольным некоммутативным ассоциативным телом R. Полностью результат Маклафлина был перенесен на некоммутативные тела Вавиловым [4] и Ли Шаньжи [30]. В [1], [2] были описаны неприводимые подгруппы группы $GL_n(R)$ над бесконечным полем R характеристики не равной 2, содержащие корневую k-подгруппу, где k — подполе поля R такое, что расширение R/k алгебраично. Попытки решить аналогичную проблему для квадратичных унипотентных элементов вычета больше 1 сталкиваются со значительными трудностями. В последние годы получен ряд глубоких результатов, касающихся этой задачи, но недостаточно разработаны аспекты, связывающие эти результаты в единое целое. Среди работ по этой тематике выделяется цикл статей Ф. Тиммесфельда ([40]–[43], [45]) о группах, содержащих подгруппы, определяемые абстрактным образом с помощью аксиоматизации некоторых свойств групп квадратичных унипотентных матриц. Теоретико-групповой по своей сущности метод Тиммесфельда получил более геометрическую интерпретацию в статье Г. Куйперса [19]. Эта интерпретация в сочетании с понятием слабого вложения А. Стейнбах [38], приводит к характеризации классических групп, содержащих трансвекции и связанных с (косо-)эрмитовыми или (псевдо-)квадратичными формами, как линейных групп, порожденных классом абстрактных абелевых групп, свойства которых получаются абстрагированием некоторых свойств трансвекций. В настоящее время заметное влияние на изучение линейных групп, содержащих унипотентные матрицы, оказывает разработанная и далеко продвинутая теория линейных групп, содержащих диагональные матрицы. Наиболее ярким примером такого влияния является решение Н. А. Вавиловым и В. А. Петровым ([6], [7]) задачи описания подгрупп полной линейной группы над кольцом R, содержащих элементарные подгруппы классических групп в векторном представлении.

Основная проблема, решаемая в настоящей диссертации, — это проблема описания линейных групп, содержащих квадратичные унипотентные элементы. Для линейных групп над конечными полями эта проблема была решена в известной работе Дж. Томпсона [39]. Ситуация, связанная с рассмотрением произвольных, т. е. не обязательно конечных полей, оказалась значительно более сложной так как при изучении линейных групп, содержащих квадратичные унипотентные k-подгруппы вычета $r > 1$ возникает необходимость рассмотрения матричных групп над некоммутативными телами, имеющими конечную размерность над своим центром. Так, поскольку любое тело кватернионов реализуется матрицами степени 2 над своим максимальным подполем, то при $r = 2$ мы сталкиваемся с задачей исследования матричных групп над телами кватернионов. Этим обстоятельством мотивируется одно из направлений данной работы — изучение подгрупп полной линейной группы степени $n \geq 2$ над телом кватернионов D, содержащих корневую k-подгруппу, где k — подполе центра тела D такое, что D алгебраично над k. Заметим, что такое изучение имеет самостоятельный интерес, являясь одной из давно поставленных проблем теории линейных групп, восходящей к ставшей классической статье Ж. Дьедонне [23].

Итогом применения созданных в диссертации методов является снятие многих ограничений, при соблюдении которых доказывались ранее результаты, касающиеся подгруппового строения линейных групп, содержащих унипотентные элементы. Эта менее ограничительная ситуация, в конечном счете, приводит к более ясному и четкому пониманию теоретико-групповой структуры и природы многих важных (в том числе классических) линейных групп. Все это подтверждает как необходимость исследования, проведенного в диссертации, так и несомненную актуальность темы этого исследования.

Цель работы и задачи исследования. Целью работы является описание подгрупповой структуры полных линейных групп над различными телами. Эта цель реализуется решением задачи описания подгрупп полных линейных групп над телами кватернионов, содержащих корневую подгруппу, а также подгрупп полных линейных групп над полями, содержащих коммутант ортогональной группы индекса больше 1.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования является подгрупповая структура матричных групп над телами, а его предмет состоит в выявлении связей между внутренним строением ассоциативных k-алгебр с делением и строением матричных групп над этими алгебрами.

Методология и методы проведенного иследования. В своей части, относящейся к линейным группам над телами кватернионов, настоящая диссертация органично связана с исследованием линейных групп над некоммутативными (ассоциативными) телами, проводившимся Д. А. Супруненко и А. Е. Залесским ([9]–[11], [15]). В ходе этого исследования были приведены примеры показывающие, что хотя ряд результатов о линейных группах над полем естественно обобщается на случай некоммутативных тел, некоторые важные теоремы в этом случае теряют силу. Другие факты подобного рода можно найти в книге [36], где систематизированы некоторые результаты, касающиеся линейных групп над некоммутативными телами. Вышесказанное показывает, что для изучения подгруппового строения линейных групп над некоммутативными телами должны разрабатываться и применяться методы, радикально отличающиеся от методов, созданных для исследования линейных групп над полями. Методы такого исследования, созданные в настоящей работе, базируются на результатах Ж. Дьедонне и А. Алберта о телах кватернионов. В своей работе [23] (см. также [8]) Ж. Дьедонне обнаружил существование гомоморфизма между, с одной стороны, унитарной группой степени 3 над телом кватернионов, определенной с помощью косоэрмитовой формы индекса 1 относительно единственной инволюции симплектического типа этого тела, и, с другой стороны, унитарной группой степени 4 над максимальным подполем этого тела. Этот гомоморфизм лежит в основе доказательств ряда утверждений данной работы, поскольку он дает возможность использовать доказанные ранее автором в [1], [2] результаты о линейных группах над полями, содержащих корневую подгруппу, для исследования линейных групп над телами кватернионов.

В диссертации также создан метод исследования неприводимых линейных групп над алгебрами с делением, основывающийся на свойствах понятия множества параметров трансвекций, введенного в диссертации. Хотя эти алгебры с делением могут быть коммутативными, сам этот метод может быть создан лишь при исследовании линейных групп над некоммутативными телами, которые должны при этом рассматриваться не с точки зрения их чисто внешней структуры, а как алгебры над подполями своих центров. Такой подход ведет к существенным трудностям, связанным со сложностью и разнообразием структуры некоммутативных алгебр и требует новой техники обращения с элементами линейных групп над этими алгебрами. Техника такого рода создана в диссертации, и на ее основе удается выявить и распознать такие подгруппы линейных групп над телами кватернионов, которые в принципе не могут быть обнаружены применявшимися ранее чисто внешними методами. Доказательства практически всех главных результатов диссертации базируются на рассмотрении содержащихся в исследуемых группах подгрупп унипотентных элементов, по возможности, более простого вида (в основном подгрупп квадратичных унипотентных элементов вычетов 1 и 2). Однако в некоторых ситуациях использование простейших квадратичных унипотентных элементов приводит к чрезвычайно громоздким вычислениям. В этом случае удобно использовать унипотентные элементы более сложного вида, т. е. те, минимальные полиномы которых имеют степень бóльшую чем 2. Объяснение этого феномена, по-видимому, состоит в том, что получаемые нами результаты, касающиеся подгруппового строения линейных групп, имеют, строго говоря, абстрактно-групповой характер и требуют создания именно теоретико-групповой техники обращения с унипотентными элементами, не зависящей от их матричной природы. В диссертации заложена разработка методов доказательств, основанных на учете этого обстоятельства.

Кроме этих, созданных автором методов, в работе используются общие традиционные методы теории групп и линейной алгебры, а также более специальные методы теории линейных групп и теории конечномерных алгебр с делением.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все результаты в диссертации являются новыми. Одной из наиболее трудных сторон исследований, проводимых в рамках теории матричных групп, является необходимость изучения произвольных подгрупп полной линейной группы над произвольным телом, скажем телом K, содержащих фиксированную подгруппу, состоящую из матриц, все элементы которых принадлежат некоторому собственному подтелу тела K. Необходимость рассмотрения подобных ситуаций, связанных с расширением основного тела, возникает при всякой попытке решить какую-либо проблему, касающуюся достаточно глубокого проникновения в вопрос подгруппового строения линейных групп (в качестве примера такой проблемы можно привести проблему описания форм алгебраических групп). Характерной сторон исследований диссертации, подтверждающих их новизну, является проведение этих исследований в контексте расширения основного поля. В диссертации впервые получено описание широкого класса подгрупп полной линейной группы над телом, определяемого лишь подполем центра этого тела, а не всем центром. Это проясняет подгрупповую структуру полной линейной группы и является основой для дальнейших исследований в этой области.

Практическая значимость полученных результатов. Результаты диссертации имеют теоретический характер.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1) классификация подгрупп полной линейной группы над телом кватернионов, содержащих классическую подгруппу над подтелом;

2) классификация подгрупп полной линейной группы над алгеброй с делением, содержащих специальную линейную группу над подалгеброй;

3) классификация неприводимых подгрупп полной линейной группы над телом кватернионов, содержащих корневую подгруппу;

4) подгрупповое строение полной линейной группы степени 4 над телом кватернионов;

5) классификация подгрупп полной линейной группы над полем, содержащих коммутант ортогональной группы.

Личный вклад соискателя. Работа выполнена соискателем лично. Совместных работ нет.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации излагались на Международной алгебраической конференции памяти М. И. Каргаполова (Красноярск, 1993), конференции „Алгебра и анализ“ (Казань, 1994), Белорусских математических конференциях (Минск, 1996, 2000), Международной алгебраической конференции памяти Д. К. Фаддеева (Санкт-Петербург, 1997), Международной математической конференции памяти Л. С. Понтрягина (Москва, 1998), Международной алгебраической конференции памяти З. И. Боревича (Санкт-Петербург, 2002), конференции „Группы и групповые кольца“ (Устронь, 2003), конференции по общей алгебре (Дрезден, 2004), а также на заседаниях алгебраического семинара Института математики Академии наук Беларуси, Санкт-Петербургского городского алгебраичекого семинара, семинара по теории групп университета провинции Манитоба.

Опубликованность результатов диссертации. Результаты диссертации опубликованы в 13 статьях и 9 тезисах конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав основной части (включая литературный обзор), заключения и списка использованных источников. Работа изложена на 270 страницах, включая список использованных источников из 246 наименований.

Краткое содержание диссертации

Первая глава диссертации содержит краткий обзор статей, вышедших в основном за последние 15 лет, и имеющих наиболее близкое отношение к предмету диссертации. Собственно результаты диссертации содержатся в последующих четырех главах. Перейдем к изложению содержания этих четырех глав.

Пусть сначала D — произвольное ассоциативное тело характеристики $\neq 2$, алгебраичное над подполем своего центра k. Пусть n — целое число, $n \geq 2$, и L — подтело тела D. Через L^n обозначается правое векторное L-пространство всех строк из n элементов тела L. Если V — правое векторное конечномерное L-пространство, то V^* — левое векторное L-пространство, сопряженное с V. Пусть $G \leq GL_n(D)$. Через $\mathcal{T}(G)$ обозначается множество всех трансвекций из G. Предположим, что $\mathcal{T}(G) \neq \varnothing$, и пусть $g \in \mathcal{T}(G)$. Если $GL_n(D)$ рассматривается как группа всех автоморфизмов пространства $D^n = E$, то $g(x) = x + s\psi(x)$ при всех $x \in E$, где $s \in E, \psi \in E^*$ — фиксированные ненулевые элементы такие, что $\psi(s) = 0$. Трансвекция g, определенная таким образом, будет обозначаться через $g(s,\psi)$, причем вектор s будет называться направлением этой трансвекции. Если $g = g(s,\psi) \in \mathcal{T}(G)$, то определим множество

$$M(s,\psi,G) = \{\alpha \in D^{\#} \mid g(s,\alpha\psi) \in G\} \cup \{0\},$$

которое назовем множеством G-параметров трансвекции $g(s,\psi)$. Множество G-параметров трансвеции зависит от выбора пары из $E \times E^*$, определяющей эту трансвекцию: при переходе к другой паре это множество заменяется на сопряженное с ним в мультипликативной группе тела D. Очевидно, $M(s,\psi,G)$ — подгруппа аддитивной группы тела D. Тем не менее оказывается, что в случае, когда G — неприводимая подгруппа группы $GL_n(D)$, содержащая корневую k-подгруппу, множество G-параметров трансвекции, содержащейся в G, несет на себе алгебраическую структуру более тонкую, чем структура аддитивной подгруппы тела D и обладает значительной инвариантностью относительно группы G в целом. Напомним, что если на векторном k-пространстве D ввести операцию умножения $\circ$, связанную с исходным умножением в D следующим образом: $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, то D относительно такого умножения и имеющегося сложения является йордановой k-алгеброй, обозначаемой $D^{(+)}$. Точный смысл упомянутого выше понятия инвариантности группы G-параметров дается следующей теоремой.

Теорема 1 *Пусть D — ассоциативное тело характеристики $\neq 2$, k — подполе его центра такое, что D алгебраично над k, $n \geq 2$ — целое число, G — неприводимая T-подгруппа группы $GL_n(D)$, содержащая корневую k-подгруппу. Если $g = g(s, \psi), \tau = \tau(p, \chi)$ — произвольные трансвекции из G ($s, p \in D^n = E, \psi, \chi \in E^*$), то справедливы следующие утверждения:*

1) *G содержит корневую k-подгруппу, соответствующую произвольной трансвекции из группы G;*

2) *$M(s, \psi, G)$ — подпространство векторного k-пространства D;*

3) *для некоторого $\delta \in D^{\#}$ и некоторого $\varepsilon \in M(p, \chi, G)$ выполняется равенство*

$$\delta M(s, \psi, G)\delta^{-1} = M(p, \varepsilon\chi, G);$$

4) *для некоторого $\gamma \in D^{\#}$ такого, что $\gamma \in M(s, \psi, G)$ множество $M(s, \gamma\psi, G)$ является подалгеброй йордановой k-алгебры $D^{(+)}$.*

Теорема 1 является важным инструментом в изучении линейных групп над некоммутативными телами. В диссертации она в основном фигурирует в применении к линейным группам над телами кватернионов, которые являются главным объектом исследования глав 2 — 4. Более точно, в этих главах изучаются линейные группы над телами кватернионов, содержащие корневую подгруппу.

В дальнейшем изложении D — тело кватернионов, центром которого является поле F характеристики $\neq 2$; k — подполе поля F такое, что F алгебраично над k. Если P — подполе поля F, то $\mathrm{Qsdr}(D, P)$ — множество всех подтел тела D, являющихся телами кватернионов относительно операций, определенных в D, и имеющих P своим центром. Если L — подтело тела D, то $\mathrm{Inv}(L)$ — множество всех антиавтоморфизмов второго порядка (инволюций) тела L. Если $\sigma \in \mathrm{Inv}(L)$, то $\mathrm{Fsd}_0(V, \sigma)$ — множество всех невырожденных σ-косоэрмитовых форм на векторном L-пространстве V, индекс Витта которых отличен от нуля. Если $n \geq 2$, через Γ будет обозначаться группа $GL_n(D)$. Если $\Phi \in \mathrm{Fsd}_0(V, \sigma)$ и $\dim V = n$, то $T_n(L, \Phi, \sigma) = T(V, \Phi, \sigma)$ — нормальный делитель унитарной группы формы Φ, порожденный всеми трансвекциями, содержащимися в этой унитарной группе.

Первым, естественно возникающим этапом исследований, как и в случае поля, является описание подгрупп группы Γ, содержащих одну из классических групп над подполем тела D. Вначале рассматриваются подгруппы группы Γ, содержащие группу $SL_n(k)$. Уже здесь некоммутативность рассматриваемой ситуации создает значительные трудности, требуя применения приемов, основанных на использовании теоремы 1. Особенно это касается групп степени 2, описание которых дается следующей теоремой, в которой фактически описываются подгруппы группы $GL_2(D)$, содержащие корневую k-подгруппу.

Теорема 2 *Если $SL_2(k) \leq X \leq GL_2(D)$, то X содержит нормальный делитель G, для которого справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *$G = SL_2(K)$, где K — подтело тела $D, K \supseteq k$;*

2) *$G = T_2(K, \Phi, \sigma)$, где $K \in \mathrm{Qsdr}(D, P), P \supseteq k$, инволюция $\sigma \in \mathrm{Inv}(K)$ имеет ортогональный или унитарный тип, $\Phi \in \mathrm{Fsd}_0(K^2, \sigma)$.*

Если $n \geq 3$, и группа X содержит специальную линейную группу над некоторым телом (возможно коммутативным), то множество X-параметров трансвекций из X имеет структуру ассоциативного тела, что дает возможность рассмотреть этот случай для тел значительно более общего вида, чем тела кватернионов.

Теорема 3 *Пусть B — произвольное тело характеристики $\neq 2$, и K — подтело тела B. Предположим, что B и K являются алгебрами над подполем k центра тела B, и что B алгебраично над k. Пусть n — целое число, $n \geq 3$. Если $SL_n(K) \leq X \leq GL_n(B)$, то $X \trianglerighteq SL_n(L)$, где L — подалгебра k-алгебры B.*

Далее, пусть J — единственная инволюция симплектического типа тела кватернионов D. Ограничение этой инволюции на любое подтело тела D, инвариантное в целом относительно J, также будет обозначаться через J. Пусть C — подтело тела $D, \sigma \in \mathrm{Inv}(C), n$ — целое число, $n \geq 3, \Phi \in \mathrm{Fsd}_0(C^n, \sigma)$. Предположим, что k содержится в множестве всех σ-симметричных элементов тела C. Следующая теорема перечисляет случаи, в которых описание подгрупп группы Γ, содержащих группу $T_n(C, \Phi, \sigma)$ имеет стандартный характер.

Теорема 4 *Пусть $T_n(C, \Phi, \sigma) \leq X \leq \Gamma$. Предположим, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *C некоммутативно;*

2) *C коммутативно, $n \neq 4$;*

3) *C коммутативно, $n = 4, M(s, \psi, X) \nsubseteq F$ для некоторой трансвекции $g(s, \psi) \in X$;*

4) *C коммутативно, $n = 4, M(s, \psi, X) \subseteq F$ для всех $g(s, \psi) \in \mathcal{T}(X), \sigma \neq J|C$.*

Тогда X содержит в качестве нормального делителя подгруппу, совпадающую либо с группой $SL_n(L)$, либо с группой $T_n(L, \Phi_L, \sigma')$, где L — подтело тела $D, L \supseteq k, \sigma' \in \mathrm{Inv}(L), \Phi_L \in \mathrm{Fsd}_0(L^n, \sigma')$. Пусть C некоммутативно. Тогда σ' имеет унитарный тип, если σ имеет унитарный тип, σ' имеет ортогональный или унитарный тип, если σ имеет ортогональный тип, и, наконец, σ' имеет симплектический или унитарный тип, если σ имеет симплектический тип.

Теорема 4 фактически объединяет несколько результатов, касающихся подгрупп группы $GL_n(D)$ над телом кватернионов D, содержащих группу T_n над подтелом тела D. В частности, эта теорема включает рассмотрение случая $C = A \in \mathrm{Qsdr}(A, P)$, где P — подполе поля F. Если при этом σ имеет ортогональный тип, то решающим для рассмотрения этого случая является то обстоятельство, общее для всех тел, конечномерных над своим центром и допускающих инволюцию ортогонального типа, что мультипликативная группа тела A порождается множеством всех σ-симметричных элементов из A. Если σ имеет симплектический тип, то метод доказательства основан на использовании уже упоминавшегося гомоморфизма Дьедонне с последующей редукцией случая $n = 3$ к линейным группам над некоторыми полями, изоморфными подполям тела A. Наконец, если σ — инволюция второго рода (унитарного типа), то доказательство использует теорему Алберта о структуре тел кватернионов, имеющих такую инволюцию (см. [25], стр. 210).

Таким образом, для описания подгрупп X группы Γ, содержащих группу $T_n(C, \Phi, \sigma)$, остается рассмотреть случай одновременного выполнения следующих условий:

- $n = 4$;

- $C = K$ коммутативно;

- $K \nsubseteq F$;

- K является квадратичным расширением некоторого подполя поля F (отсюда следует, что $\sigma = J|K$);

- $\Phi \in \mathrm{Fsd}_0(K^4, J)$;

- $M(s,\psi,X) \subseteq F \quad \forall g(s,\psi) \in \mathcal{T}(X)$.

Все эти условия будут предполагаться выполненными в формулировках нижеследующих теорем 5 и 7. Оказывается, что этот случай, действительно, является исключительным, и результаты, возникающие при его рассмотрении, радикально отличаются от результатов, объединенных в теореме 4, не только по формулировке, но и по методам их получения. Сущность этих методов коротко состоит в следующем. Условие $M(s,\psi,X) \subseteq F$ приводит к некоторым условиям, налагаемым на направление и функционал каждой трансвекции из X. Далее, среди множества всех трансвекций из $GL_4(D)$ выделяется подмножество, состоящее из трансвекций, удовлетворяющих этим условиям. На следующем этапе показывается, что группа, порожденная выделенным таким образом множеством трансвекций, сохраняет инвариантным в целом некоторое множество векторов из естественного модуля D^4 группы $GL_4(D)$. Для этого вводятся в рассмотрение некоторые наборы, состоящие из подполя центра тела D и элементов этого тела, подчиненных некоторым условиям, вытекающим из условия $M(s,\psi,X) \subseteq F$ (эти наборы именуются $\mathcal{D}$-тройками, $\mathcal{D}$-четверками, $\mathcal{P}$-четверками). По каждому такому набору строится некоторая подгруппа группы $GL_4(D)$, которая, как показывается на последнем этапе, возникает в качестве промежуточной подгруппы. Все группы, появляющиеся в результате осуществления этой конструкции, оказываются подгруппами группы $T_4(A,\Phi,J)$, где A — подходящим образом выбранное некоммутативное подтело тела $D, \Phi \in \mathrm{Fsd}_0(A^4, J)$. Множество параметров трансвекций этих групп совпадает с подполем центра тела A. Следуя изложенной здесь общей схеме для исследования этого случая, введем в рассмотрение некоторые подгруппы группы $GL_4(D) := \Pi$.

Через $\mathrm{Ps}(D,F)$ будем обозначать множество всех пар $(u,v) \in (D \setminus F)^2$ таких, что $uv = -vu$.

Упорядоченный набор (P,u,v) назовем $\mathcal{D}$-тройкой тела D, если выполнены следующие условия:

(1) P — подполе поля F;

(2) $(u,v) \in \mathrm{Ps}(D,F)$, $u^2, v^2 \in P$.

Если $(P,u,v) = \mathcal{F}_1$ — $\mathcal{D}$-тройка тела D, то подгруппу группы Π, порожденную корневой P-подгруппой $t_{12}(P)$ и матрицами $t_{21}(1), t_{34}(1), t_{43}(1)$,

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1&0&-u\\0&1&0&0\\0&u&1&-u^2\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1&0&-v\\0&1&0&0\\0&v&1&-v^2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

обозначим через $Y^{(1)}(\mathcal{F}_1) = Y^{(1)}$. Если $A_1 = P(u) + P(u)v$, то $A_1 \in \mathrm{Qsdr}(D,P)$. Зафиксируем базис $\mathbf{B}$ пространства $E_1 = A_1^4$ и снабдим E_1 формой $\Phi_1 \in \mathrm{Fsd}_0(E_1, J)$, матрица которой относительно $\mathbf{B}$ равна $\mathrm{diag}(\varDelta, \varDelta)$, где $\varDelta = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$. Тогда

$Y^{(1)} \lneqq T_4(A_1, \Phi_1)$, и $Y^{(1)}$ изоморфна спинорной группе некоторой невырожденной квадратичной формы от семи переменных над P, индекс Витта которой равен 2.

Упорядоченный набор (P, u, v, θ) назовем $\mathcal{D}$-четверкой тела D, если выполнены следующие условия:

(1) (P, u, v) — $\mathcal{D}$-тройка тела D;

(2) $\theta \in F \setminus P, \ \theta^2 \in P$.

Если $(P, u, v, \theta) = \mathcal{F}_0$ является $\mathcal{D}$-четверкой тела D, то определена группа $Y^{(1)}(P, u, v)$. Положим $w = uv$ и обозначим через $Y^{(0)}(\mathcal{F}_0) = Y^{(0)}$ подгруппу группы Π, порожденную группой $Y^{(1)}(P, u, v)$ и матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -w\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & w\theta & 1 & -w^2\theta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $A_0 = P(\theta, u) + P(\theta, u)v$, то $A_0 \in \mathrm{Qsdr}(D, P(\theta))$ и $Y^{(0)} \lneqq T_4(A_0, \Phi_0)$, где $\Phi_0 \in \mathrm{Fsd}_0(E_0, J)$, $\Phi_0 = \mathrm{diag}(\varDelta, \varDelta)$. Группа $Y^{(0)}$ изоморфна спинорной группе некоторой невырожденной квадратичной формы от восьми переменных над P, индекс Витта которой равен 2.

Группы $Y^{(0)}$ и $Y^{(1)}$ дают возможность рассмотреть случай форм Φ индекса 2.

Теорема 5 *Предположим, что индекс Витта формы Φ равен 2. Тогда X содержит нормальный делитель G, для которого выполняется одно из следующих двух утверждений:*

1) $G = T_4(L, \Phi_{(L)})$, где $L \supseteq K$, и L — либо подполе тела D, либо $L \in \mathrm{Qsdr}(D, P)$, где P — некоторое подполе поля F, а форма $\Phi_{(L)} \in \mathrm{Fsd}_0(L^4, J)$ получена из Φ расширением поля K до L;

2) G сопряжен в Π с группой $Y^{(1)}(P, u, v)$ или с группой $Y^{(0)}(P, u, v, \theta)$, т. е. изоморфен группе $\mathrm{Spin}_l(P, f)$, где P — подполе поля F, содержащее k, $l = 7$ или $l = 8$, f — подходящая квадратичная форма от l переменных над P, индекс Витта которой равен 2.

Чтобы рассмотреть случай, когда форма Φ имеет индекс 1, определим еще один класс подгрупп группы Π.

Упорядоченный набор (P, u, v, θ) будем называть $\mathcal{P}$-четверкой тела D, если выполнены следующие условия:

(1) P — подполе поля F;

(2) $\theta \in F \setminus P, \theta^2 \in P$;

(3) $(u, v) \in \mathrm{Ps}(D, F)$, $u^2 \in P$, $v^2 \in P(\theta) \setminus P$;

(4) тело $A_2 = P(\theta, u) + P(\theta, u)v \in \mathrm{Qsdr}(D, P(\theta))$ не содержит подтел из $\mathrm{Qsdr}(D, P)$.

Предположим, что D обладает $\mathcal{P}$-четверкой $(P, u, v, \theta) = \mathcal{F}_2$. Понятно, что тогда поле $P(\theta)$ — квадратичное расширение поля P. Обозначим через σ нетривиальный автоморфизм поля $P(\theta)$ над P и положим

$$\alpha_3 = 2u\theta((v^2)^\sigma - v^2)^{-1}, \ \alpha_4 = -\alpha_3 v^{-2}(v^{-2})^\sigma, \ \nu_i = \frac{1}{2}\alpha_i \ (i = 3, 4), \ w = uv.$$

Подгруппу группы Π, порожденную корневой P-подгруппой $t_{12}(P)$ и матрицами $t_{21}(1)$,

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}1-\nu_3 & 1 & \alpha_3\\ \nu_3^2 & 1-\nu_3 & -\nu_3\alpha_3\\ -\nu_3 & 1 & 1+\alpha_3\end{pmatrix},1\right), \quad \begin{pmatrix}1-\nu_4 & 1 & 0 & \alpha_4\\ \nu_4^2 & 1-\nu_4 & 0 & -\nu_4\alpha_4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\nu_4 & 1 & 0 & 1+\alpha_4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1+u\theta & 1 & \alpha_3 v & (v^2)^\sigma\alpha_4 v\\ u^2\theta^2 & 1+u\theta & u\theta\alpha_3 v & \theta(v^2)^\sigma\alpha_4 w\\ -\theta w & v & 1-v^2\alpha_3 & -v^2(v^2)^\sigma\alpha_4\\ -(v^2)^\sigma\theta w & (v^2)^\sigma v & -(v^2)^\sigma v^2\alpha_3 & 1-v^2(v^4)^\sigma\alpha_4\end{pmatrix}$$

обозначим через $Y^{(2)}(\mathcal{F}_2) = Y^{(2)}$. Если в пространстве $E_2 = A_2^4$ зафиксировать базис $\mathbf{B}$ и снабдить E_2 формой $\Phi_2 \in \mathrm{Fsd}_0(E_2, J)$, матрица которой относительно $\mathbf{B}$ равна $\mathrm{diag}(\varDelta, \alpha_3, \alpha_4)$, то $Y^{(2)} \lneqq T_4(A_2, \Phi_2)$. Группа $Y^{(2)}$ изоморфна некоторой подгруппе спинорной группы подходящей квадратичной формы от восьми переменных, индекс Витта которой равен 3. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 6 *Для группы $Y^{(2)}$ существуют:*

- *во-первых, квадратичная форма q от восьми переменных над полем $P(u)$, коэффициенты которой лежат в P, а индекс Витта равен 3;*
- *во-вторых, группа $Z \le GL_8(P(\theta, u))$ изоморфная группе $\mathrm{Spin}_8(P(u), q)$;*
- *в-третьих, J-полулинейная полуинволюция d пространства $(P(\theta, u))^8$,*

такие, что $Y^{(2)}$ изоморфна подгруппе группы Z, порожденной всеми квадратичными унипотентными элементами вычета 2 из Z коммутирующими с d.

Группы $Y^{(2)}(P, u, v, \theta)$, как видно из следующей теоремы, дают возможность получить описание подгрупп группы Π, содержащих $T_4(K, \Phi)$, в случае, когда Φ имеет индекс 1.

Теорема 7 *Предположим, что индекс Витта формы Φ равен 1. Тогда X содержит нормальный делитель G, для которого выполняется одно из следующих утверждений:*

1) G такой, как в пп. 1), 2) теоремы 5;

2) G сопряжен в Π с группой $Y^{(2)}(P, u, v, \theta)$, где $P \supseteq k$.

Используя теоремы 4 и 5 получаем следующее описание подгрупп группы $\Gamma = GL_n(D)$, содержащих симплектическую группу.

Теорема 8 *Предположим, что n четно, $n \ge 4, n = 2m$. Пусть K — подполе тела D, содержащее k. Если $Sp_n(K) \le X \le \Gamma$, то X содержит нормальный делитель G, для которого выполнено одно из следующих утверждений:*

1) $G = Sp_n(L)$, где L — подполе тела $D, K \subseteq L$;

2) $G = SL_n(L)$, где L — подтело тела $D, L \supseteq k$;

3) $G = T_n(L, q_0, \sigma)$, где L — подтело тела $D, L \supseteq k, \sigma \in \mathrm{Inv}(L)$, форма $q_0 \in \mathrm{Fsd}_0(L^n, \sigma)$ имеет индекс Витта m;

4) *$n=4, G$ изоморфен группе $\mathrm{Spin}_l(P,f)$, где P — подполе поля $F, k\subseteq P, l=7$ или $l=8$, f — невырожденная квадратичная форма от l переменных над P, индекс Витта которой равен 2.*

Теорема 8 еще раз подтверждает высказанное ранее рядом исследователей предположение о невозможности естественного определения аналога симплектической группы над некоммутативным телом (в данном случае над телом кватернионов).

Перечисленные выше результаты составляют содержание глав 2, 3 диссертации. Глава 4 диссертации посвящена непосредственному изучению подгрупп группы $\Gamma = GL_n(D)$ над телом кватернионов D, содержащих корневую k-подгруппу. Для формулировки основных результатов главы нам понадобятся следующие понятия.

Пусть C — произвольное тело, m, n — целые числа такие, что $n \geq 3, 1 < m \leq n$. Подгруппу группы $GL_n(C)$ будем называть m-мерной, если эта подгруппа сопряжена в $GL_n(C)$ с подгруппой вида $\mathrm{diag}(H, 1, \ldots, 1)$, где H — неприводимая подгруппа группы $GL_m(C)$. Линейные группы, порожденные трансвекциями будут именоваться T-группами.

Основной результат четвертой главы — описание неприводимых подгрупп группы Γ, содержащих корневую k-подгруппу. Конечно, в ходе такого описания возникают все группы, перечисленные в первых двух главах. Оказывается, однако, этих групп недостаточно для получения полного описания. Более точно, этих групп не хватает для исследования случая $n=4$. Чтобы иметь в своем распоряжении запас групп, достаточный для изучения групп степени 4, введем в рассмотрение еще одно семейство подгрупп группы $\Pi = GL_4(D)$.

Будем говорить, что упорядоченная совокупность (P, r, b, u, v) является $\mathcal{D}$-пятеркой тела D, если выполнены следующие условия:

(1) P — подполе поля F;

(2) r, b, u, v — элементы из D такие, что $r \in P,\ b \in F,\ (u, v) \in \mathrm{Ps}(D, F),\ u^2,\ b^2u^2 + v^2,\ b + 2rv^{-2} \in P$;

(3) $[P(b) : P] = 3$.

Предположим, что D обладает $\mathcal{D}$-пятеркой $\mathcal{F} = (P, r, b, u, v)$, и пусть $\alpha = 2ru, p = bu+v, q = 2p+\alpha v^{-2}, \nu = \frac{1}{2}\alpha$. Подгруппу группы Π, порожденную корневой P-подгруппой $t_{12}(P)$ и матрицами

$$t_{21}(1), \quad \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 1-\nu & 1 & \alpha \\ \nu^2 & 1-\nu & -\nu\alpha \\ -\nu & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}, 1\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1+p & 1 & \alpha v^{-1} & 1 \\ p^2 & 1+p & p\alpha v^{-1} & p \\ v^{-1}p & v^{-1} & 1-v^{-2}\alpha & v^{-1} \\ -qp & -q & -q\alpha v^{-1} & 1-q \end{pmatrix},$$

обозначим через $Y(\mathcal{F}) = Y$. Пусть $A = P(b, u) + P(b, u)v$. Тогда $A \in \mathrm{Qdsr}(D, P(b))$. Если зафиксировать в $E = A^4$ базис $\mathbf{B}$ и снабдить E формой $\Phi \in \mathrm{Fsd}_0(E, J)$, матрица которой относительно базиса $\mathbf{B}$ равна $\mathrm{diag}(\mathit{\Delta}, \alpha, q^{-1})$, то $Y \lneqq T_4(A, \Phi)$. Главной трудностью здесь является доказательство того, что Y — собственная подгруппа группы $T_4(A, \Phi)$. Метод этого доказательства состоит в описании орбит группы Y при ее действии на естественном модуле A^4. Для этого выбирается система образующих группы Y, состоящая из матриц, входящих в подгруппы, сопряженные с группой

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}1 & f^J c & a\\ 0 & 1 & f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, 1\right),$$

где $c \in A$ — фиксированный J-кососимметричный элемент, f пробегает A, и a — такой элемент из A, что для любого данного $f \in A$ $a - a^J = f^J c f$ (исходная система образующих, состоящая из трансвекций, через которую Y определяется, не годится, поскольку приводит к чрезвычайно большим вычислениям).

Согласно приведенной ниже теореме 11 необходимым этапом классификации неприводимых подгрупп группы Π, содержащих корневую k-подгруппу, является описание надгрупп в Π группы $\operatorname{diag}(T_3(K, \Phi_0), 1)$, где K — подполе тела D, допускающее инволютивный автоморфизм σ, и $\Phi_0 \in \operatorname{Fsd}_0(K^3, \sigma)$. Это описание дается следующей теоремой.

Теорема 9 *Пусть K — подполе тела D, $\sigma \in \operatorname{Inv}(K)$, $\Phi_0 \in \operatorname{Fsd}_0(K^3, \sigma)$. Предположим, что подполе K_0 поля K, состоящее из всех σ-симметричных элементов поля K, содержит k. Зафиксируем ненулевой σ-кососимметричный элемент $u \in K$, и пусть r — элемент из K_0 такой, что $\Phi_0(x, x) = \zeta_1^\sigma \zeta_2 - \zeta_2^\sigma \zeta_1 + 2\zeta_3^\sigma r u \zeta_3$ для всех $x = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in K^3$. Если $\operatorname{diag}(T_3(K, \Phi_0), 1) \le X \le GL_4(D) := \Pi$ и X — неприводимая подгруппа группы Π, то X содержит нормальную подгруппу G для которой выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $yGy^{-1} = SL_4(L)$, *где* $y = \operatorname{diag}(1_3, \lambda) \in \Pi$, L *— подтело тела* D;

(2) $yGy^{-1} = T_4(L, \Phi, \sigma')$, *где* $y = \operatorname{diag}(1_3, \lambda) \in \Pi$, L *— подтело тела* D, $\sigma' \in \operatorname{Inv}(L)$, $\Phi \in \operatorname{Fsd}_0(L^4, \sigma')$;

(3) $\sigma = J|K$, $G \cong \operatorname{Spin}_m(P, f)$ *где* P *— подполе поля* F, $m = 7$ *или* $m = 8$, f *— невырожденная квадратичная форма от* m *переменных над* P, *индекс Витта которой равен* 2;

(4) $\sigma = J|K$, *существуют подполя* P, P_0 *поля* F *такие, что* $P_0 \subset P$, $[P : P_0] = 2$, G *изоморфна подгруппе* Z_0 *некоторой группы* $Z \le GL_8(K(P))$, *изоморфной спинорной группе квадратичной формы от восьми переменных над полем* $Q = K(P_0)$, *коэффициенты которой лежат в* P_0, *индекс Витта равен* 3, *и* Z_0 *порождается всеми квадратичными унипотентными элементами вычета* 2 *из* Z, *коммутирующими с подходящей* J*-полулинейной полуинволюцией пространства* $(K(P))^8$;

(5) $\sigma = J|K$, *существуют подполе* P *поля* F, *элементы* b, $v \in D$ *и матрица* $y = \operatorname{diag}(1_3, \lambda) \in \Pi$ *такие, что* $\mathcal{F} = (P, r, b, u, v)$ *—* $\mathcal{D}$*-пятерка тела* D, *и* $yGy^{-1} = Y(\mathcal{F})$.

Отметим, что в диссертации строится пример тела кватернионов, обладающего $\mathcal{D}$-пятеркой, а также пример тела кватернионов, не имеющего $\mathcal{D}$-пятерки. Таким образом, с учетом теоремы 9 понятие тела кватернионов, обладающего $\mathcal{D}$-пятеркой является содержательным и представляет интерес как предмет самостоятельного изучения.

Обозначим, далее, через $\mathfrak{M}_n(D, k)$ множество, состоящее из следующих подгрупп группы $\Gamma = GL_n(D)$:

$SL_n(L)$, где L — подтело тела $D, k \subseteq L$;
$T_n(L, \Phi, \sigma)$, где L — подтело тела $D, k \subseteq L, \sigma \in \mathrm{Inv}(L), \Phi \in \mathrm{Fsd}(L^n, \sigma)$;
$Sp_n(L)$, где L — подполе тела $D, k \subseteq L$ (n четно);
$Y^{(1)}(P, u, v)$, где (P, u, v) — $\mathcal{D}$-тройка тела D, такая, что $P \supseteq k$ $(n = 4)$;
$Y^{(0)}(P, u, v, \theta)$, где (P, u, v, θ) — $\mathcal{D}$-четверка тела D, такая, что $P \supseteq k$ $(n = 4)$;
$Y^{(2)}(P, u, v, \theta)$, где (P, u, v, θ) — $\mathcal{P}$-четверка тела D, такая, что $P \supseteq k$ $(n = 4)$;
$Y(P, r, b, u, v)$, где (P, r, b, u, v) — $\mathcal{D}$-пятерка тела D, такая, что $P \supseteq k$ $(n = 4)$.
Кульминацией третьей главы является следующий результат.

Теорема 10 *Пусть n — целое число, $n \geq 2$. Если G — неприводимая T-подгруппа группы Γ, содержащая корневую k-подгруппу, то G сопряжена в Γ с группой из $\mathfrak{M}_n(D, k)$.*

Теорема 10 в сочетании с теоремой Клиффорда (см. [14]) приводит к описанию произвольных (не обязательно порожденных трансвекциями) неприводимых подгрупп группы Γ, содержащих корневую k-подгруппу, а затем к описанию вполне приводимых подгрупп группы Γ, содержащих корневую k-подгруппу. Весьма важным, хотя и вспомогательным, инструментом доказательства теоремы 10 является следующее утверждение, представляющее собой обобщение теоремы 2.5 [12] на случай некоммутативных тел.

Теорема 11 *Пусть n — целое число, $n \geq 3$, C — произвольное (ассоциативное) тело характеристики $\neq 2$, k — подполе центра тела C такое, что C алгебраично над k. Предположим, что G — неприводимая T-подгруппа группы $GL_n(C)$, содержащая корневую k-подгруппу. Тогда G содержит T-подгруппу, которая содержит корневую k-подгруппу и является либо $(n-1)$-мерной, либо $(n-2)$-мерной.*

Теорема 11 дает возможность придать доказательству теоремы 10 до некоторой степени индуктивный характер и разбить это доказательство на ряд этапов, которые состоят в доказательстве следующих теорем 12–14.

Теорема 12 *Пусть $n \geq 3, H_0 \in \mathfrak{M}_{n-1}(D, k)$. Если G — неприводимая T-подгруппа группы Γ, содержащая подгруппу $\mathrm{diag}(H_0, 1)$, то $yGy^{-1} \in \mathfrak{M}_n(D, k)$ для некоторой матрицы $y = \mathrm{diag}(1_{n-1}, \lambda) \in \Gamma$.*

Пусть, далее, $n \geq 4, H_0 \in \mathfrak{M}_{n-2}(D, k)$, и G — неприводимая T-подгруппа группы Γ, содержащая подгруппу $\mathrm{diag}(H_0, 1_2)$.

Теорема 13 *Предположим, что H_0 не является группой $Sp_{n-2}(k_0)$, где k_0 — подполе тела D, содержащее k. Тогда G содержит $(n-1)$-мерную T-подгруппу.*

Теорема 14 *Пусть n четно, $H_0 = Sp_{n-2}(k)$. Предположим, что G не содержит $(n-1)$-мерных T-подгрупп. Тогда $yGy^{-1} = Sp_n(P)$, где $y = \mathrm{diag}(1_{n-2}, y') \in \Gamma$ $(y' \in GL_2(D)), P$ — подполе тела D, содержащее k.*

Пусть теперь поле K является алгебраическим расширением своего подполя k характеристики $\neq 2$. Предположим, что $k \neq GF(3)$. Последняя, пятая глава диссертации посвящена некоторым подгруппам группы $GL_n(K) := \Lambda$, где $n > 4$, содержащим квадратичную унипотентную k-подгруппу вычета 2. Наибольший интерес эти группы представляют в том случае, если они не содержат трансвекций. Одним из наиболее важных примером такой группы, является группа $\Omega_n(k, Q)$ —

коммутант ортогональной группы квадратичной формы Q над полем k, индекс Витта которой не меньше 2. В связи с известной проблемой описания подгрупп группы Λ, содержащей одну из классических групп, естественно возникает задача описания надгрупп в Λ группы $\Omega_n(k, Q)$. Ранее аналогичная задача была решена для групп $SL_n(k), T_n(k, \Phi)$ (поле k имеет инволютивный автоморфизм σ, σ-косоэрмитова форма Φ имеет ненулевой индекс Витта), $Sp_n(k)$ ($n \geq 4$, n четно). Все перечисленные группы порождаются содержащимися в них корневыми подгруппами. Поэтому методы, использованные для решения указанной задачи в случае этих групп, не могут быть применены к случаю групп, содержащих $\Omega_n(k, Q)$. Для рассмотрения этого случая в диссертации создана техника обращения с квадратичными унипотентными элементами вычета 2. Следует отметить, что наличие в многих важных матричных группах квадратичных унипотентных элементов вычета 2 использовалось ранее рядом авторов ([17], [28], [37]), но при весьма сильных ограничениях. Предполагалось, например, что основное поле конечно или, что все изучаемые группы содержатся в некоторой фиксированной ортогональной группе. Созданная в диссертации техника позволяет получать результаты, свободные от этих и подобных им ограничений. Так, в диссертации рассматриваются квадратичные унипотентные элементы вычета 2, заранее не связанные с некоторой ортогональной группой, т. е., более общо, корневые элементы линейных алгебраических групп, принадлежащих различным лиевым типам. На основе этой, вновь созданной техники, прежде всего, выясняется то, какими могут быть линейные группы, порожденные двумя квадратичными унипотентными k-подгруппами вычета 2.

Теорема 15 *Пусть X — подгруппа группы $GL_n(K)$, порожденная двумя квадратичными унипотентными k-подгруппами вычета 2 группы Λ. Если X не содержит трансвекций, то для нее имеет место одна из следующих возможностей:*

(1) *X абелева;*

(2) *X изоморфна подгруппе группы $SL_3(k)$, состоящей из всех верхних треугольных матриц, все диагональные элементы которых равны 1;*

(3) *X изоморфна группе $SL_2(L)$ над полем L, которое либо заключено между k и K, либо содержится в некотором поле, являющемся квадратичным расширением поля K.*

Если X содержит трансвекцию, то X содержит также некоторую корневую k-подгруппу.

Этот результат примыкает к утверждениям из работы Н. А. Вавилова [3]. Заметим, впрочем, что в теореме 15 речь идет о подгруппах полной линейной группы $GL_n(K)$, порожденных длинными корневыми k-подгруппами, где k может и не совпадать с K, в то время как в [3] равенство $K = k$ предполагается заведомо выполненным. Используя найденную структуру линейных групп, порожденных двумя квадратичными унипотентными k-подгруппами вычета 2, получено следующее описание подгрупп группы Λ, содержащих группу $\Omega_n(K, Q)$.

Теорема 16 *Если $n > 4$, то всякая не содержащая трансвекций подгруппа группы $GL_n(K)$, содержащая подгруппу $\Omega_n(k, Q)$, включает в себя в качестве нормального делителя группу $\Omega_n(L, Q_L)$, где L — подполе поля K, содержащее k, Q_L — квадратичная форма от n переменных, полученная из Q расширением поля k до L.*

Сходные результаты, однако значительно меньшей общности, были получены О. Кингом [27] и Ли Шаньжи [29], [31]. Так, в [27] была доказана максимальность в группе $SL_n(K)$ группы ортогональных подобий $GO_n(K,Q)$ в предположении, что индекс Витта квадратичной формы Q отличен от нуля. В [29] и [31] проводится описание групп, заключенных между $\Omega_n(K,Q)$ и $SL_n(K)$, при том же ограничении на индекс формы Q. Из теоремы 16, учитывая упоминавшееся выше описание подгрупп группы Λ, содержащих корневую k-подгруппу группы Λ, приходим к следующему утверждению.

Теорема 17 *Если $\Omega_n(k,Q) \leq G \leq \Lambda$ и $n > 4$, то G содержит в качестве нормального делителя группу, сопряженную в Λ с одной из групп $Sp_n(L), T_n(L,\Phi), \Omega_n(L,Q_L), SL_n(L)$, где L — подполе поля K, содержащее k.*

Список литературы

[1] Башкиров Е. Л. О подгруппах специальной линейной группы степени 2 над бесконечным полем // Матем. сб. — 1996.— Т. 187, N2.— С. 19—36.

[2] Башкиров Е. Л. Линейные группы, содержащие корневую подгруппу // Сиб. мат. журнал. – 1996. – Т. 37, N6.– С. 1238 – 1255.

[3] Вавилов Н. А. О геометрии длинных корневыых подгрупп в группах Шевалле // Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1. – 1988, вып. 1.– С. 8 –11.

[4] Вавилов Н. А. Линейные группы, порожденные однопараметрическими подгруппами одномерных преобразований // Успехи мат. наук.— 1988.— Т. 44, вып. 1.— С. 189—190.

[5] Вавилов Н. А. Унипотентные элементы в подгруппах расширенных групп Шевалле, содержащих максимальный тор // ДАН.— 1993.— Т. 328, N 5.— С. 536—539.

[6] Вавилов Н. А., Петров В. А. О надгруппах $EO(2l,R)$ // Зап. научн. семин. ПОМИ.— 2000.— Т. 272.— С. 68—85.

[7] Вавилов Н. А., Петров В. А. О надгруппах $Ep(2l,R)$ // Алгебра и анализ.— 2003.— Т.15, N 4.— С. 49 – 100.

[8] Дьедонне Ж. Геометрия классических групп.— М.: Мир, 1974.— 204 с.

[9] Залесский А. Е. Силовские p-подгруппы полной линейной группы над телом // Изв. АН СССР, серия матем.— 1967.— Т. 31.— С. 1149—1158.

[10] А. Е. Залесский. Строение некоторых классов матричных групп. Сиб. мат. журнал 8(1967), N6, 1284 – 1298.

[11] Залесский А. Е. О классических группах // Доклады АН БССР.— 1968.— Т. 12, N 2.— С. 107—109.

[12] Залесский А. Е., Сережкин В. Н. Линейные группы, порожденные трансвекциями // Изв. АН СССР, сер. матем.— 1976.— Т. 40, N 1.— С. 26—49.

[13] Мартынова Л. А. Нормальные подгруппы унипотентных подгрупп групп Шевалле типов E_6, E_7, E_8 // Вестник МГУ. Сер. I. Мат. и мех.— 1995.— N 1.— С. 3—6.

[14] Супруненко Д. А. Группы матриц.— М.: Наука, 1972.— 351 с.

[15] Супруненко Д. А. Подгруппы полной линейной группы над телом D, содержащие группу всех специальных треугольных матриц $U(n, D)$ // Доклады АН БССР.— 1970.— Т. 14.— С. 305—307.

[16] Cameron P. J., Hall J. I. Some groups generated by transvection subgroups // J. Algebra.— 1991.— Vol. 140.— P. 184—209.

[17] Cantor W. M. Subgroups of classical groups generated by long root elements // Trans. Amer. Math. Soc.— 1979.— Vol. 248, N 2.— P. 347—379.

[18] Chen Yu. Isomorphic Chevalley groups over integral domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.— 1994.— Vol. 92.— P. 231—237.

[19] Cuypers H. The geometry of k-transvections groups.— Preprint TU Eindhoven.— 1994.

[20] Cuypers H. Symplectic geometries, transvection subgroups and modules // J. Comb. Theory. Ser. A.— 1994.— Vol. 65.— P. 39—59.

[21] Cuypers H., Steinbach A. Linear transvection groups and embedded polar spaces // Invent. Math.— 1999.— Vol. 137.— P. 169—196.

[22] Cuypers H., Steinbach A. Special linear groups generated by transvections and embedded polar spaces // J. London Math. Soc. (3).— 2001.— Vol. 64.— P. 576—594.

[23] Dieudonné J. Sur les groupes unitaires quaternioniques à deux et à trois variables // Bull. Sci. Math.— 1953.— Vol. 77.— P. 195—213.

[24] Francis T. A. Presentations of the special and general linear groups // J. Algebra.— 1994.— Vol. 169, N 3.— P. 943—964.

[25] Jacobson N. Finite dimensional division algebras over fields.— Berlin: Springer Verlag, 1996.— 278 pp.

[26] King O. On subgroups of the special linear groups containing the special unitary group // Geom. Dedicata.— 1985.— Vol. 19.— P. 297—310.

[27] King O. On subgroups of the special linear groups containing the special orthogonal group // J. Algebra.— 1985.— Vol. 96, N 1.— P. 178—193.

[28] Li Shang Zhi. Maximal subgroups in $P\Omega(n, F, Q)$ with root subgroups // Scientia Sinica. Ser. A.— 1985.— Vol. 28, N 8.— P. 826—838.

[29] Li Shang Zhi. Maximal subgroups in classical groups over arbitrary fields // Proc.Symp. Pure Math.— 1987.— Vol. 47, Part 2.— P. 487—493.

[30] Li Shang Zhi. Irreducible subgroups of $SL(n, K)$ generated by root subgroups // Geom. Dedicata.— 1989.— Vol. 31.— P. 41—44.

[31] Li Shang Zhi. Overgroups of $SU(n, K, f)$ or $\Omega(n, K, Q)$ in $GL(n, K)$ // Geom. Dedicata.— 1990.— Vol. 33.— P. 241—250.

[32] Li Shang Zhi. Overgroups in $GL(n, F)$ of classical groups over a subfield of F // Algebra Colloq.— 1994.— Vol. 1, N 4.— P. 335—346.

[33] McLaughlin J. Some groups generated by transvections // Arch. Math.— 1967.— Vol. 18.— P. 364—368.

[34] Parker C., Rowley P. Extremal subgroups in Chevalley groups // J. London Math. Soc. (2).— 1997.— Vol. 55, N 2.— P. 387—399.

[35] Petrov V. Overgroups of unitary groups // K-Theory.— 2003.— Vol. 29.— P. 147—174.

[36] Shirvani M., Wehrfritz B. A. F. Skew linear groups.— Cambridge University Press.— 1986.— 253 pp.

[37] Stark B. Some subgroups of $\Omega(V)$ generated by long group type 1 // Ill. J. Math.— 1973.— Vol. 17, N 4.— P. 584—607.

[38] Steinbach A. Subgroups of classical groups generated by transvections or Siegel transvections. I, II // Geom. Dedicata.— 1997.— Vol. 68.— P. 281—322, 323—357.

[39] Thompson J. G. Quadratic pairs // Actes du Congres International des Mathematiciens 1, Nice, 1970 Gauthier-Villars.— Paris, 1971.— P. 375—376.

[40] Timmesfeld F. G. Groups generated by k-transvections // Invent. Math.— 1990.— Vol. 100, N 1.— P. 167—206.

[41] Timmesfeld F. G. Groups generated by k-root subgroups // Invent. Math.— 1991.— Vol. 106.— P. 571—666.

[42] Timmesfeld F. G. Subgroups generated by root elements of groups generated by k-root subgroups // Geom. Dedicata.— 1994.— Vol. 49.— P. 293—321.

[43] Timmesfeld F. G. Moufang planes and the groups E_6^K and $SL_2(K)$, K a Caley division algebra // Forum Math.— 1994.— Vol. 6, N 2.— P. 209—231.

[44] Timmesfeld F. G. Presentations for certain Chevalley groups // Geom. Dedicata.— 1998.— Vol. 73, N 1.— P. 85—117.

[45] Timmesfeld F. G. Abstract root subgroups and quadratic action // Adv. Math.— 1999.— Vol. 142.— P. 1—150.

[46] Wang Deng Yin. Overgroups of Levi subgroups L_α $(n(\alpha) = 1)$ in Chevalley groups $G(\Phi, F)$ // Adv. Math. (China).— 2002.— Vol. 31, N 2.— P. 148—152.

[47] Wang Deng Yin, Li Shang Zhi. Overgroups of $L_1(F)$ in $L(F)$ // J. China. Univ. Sci. Tech.— 1998.— Vol. 28, N 3.— P. 264—269.

[48] You Hong. Commutators and unipotents in symplectic groups // Acta Math. Sinica (N. S.).— 1994.— Vol. 10, Special Issue.— P. 137—179.

Работы автора по теме диссертации

[49] Башкиров Е. Л. О линейных группах, содержащих коммутант ортогональной группы индекса больше 1 // Сиб. мат. журнал.— 1992.— Т. 33, N 5.— С. 15—22.

[50] Башкиров Е. Л. О линейных группах, порожденных двумя длинными корневыми подгруппами // Сиб. мат. журнал.— 1993.— Т. 34, N 2.— С. 15—23.

[51] Башкиров Е. Л. О линейных группах, заключенных между двумя специальными линейными группами над различными телами // Известия АН Беларуси, сер. физ.-мат. наук.— 1993.— N 3.— С. 106—108.

[52] Башкиров Е. Л. О подгруппах специальной линейной группы степени 2 над телом обобщенных кватернионов // Известия АН Беларуси, сер. физ.-мат. наук.— 1994.— N 1.— С. 34—39.

[53] Башкиров Е. Л. О подгруппах полной линейной группы над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу // Сиб. мат. журнал.— 1998.— Т. 39, N 6.— С. 1251—1266.

[54] Башкиров Е. Л. О подгруппах полной линейной группы степени 4 над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу индекса 2 // Алгебра, геометрия и топология. Тез. докл. Международной конф. посвящ. 90-летию со дня рожд. Л. С. Понтрягина, Москва, 31 авг.—6 сент. 1998 г. / Мат ин-т РАН, МГУ.— Москва, 1998.— С. 52—53

[55] Башкиров Е. Л. О подгруппах полной линейной группы степени 4 над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу индекса 1 // Алгебра и анализ.— 2001.— Т. 13, вып. 3.— С. 18—42.

[56] Башкиров Е. Л. Группа Spin_8 и некоторые подгруппы унитарных групп степени 4 над телом кватернионов // Алгебра и анализ.— 2001.— Т. 13, вып. 3.— С. 43—64.

[57] Башкиров Е. Л. О подгруппах полной линейной группы степени 4 над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу индекса 2 / Ред. Сиб. мат. журнал. СО РАН.— 20 с.— Деп. в ВИНИТИ 29. 08. 2001, No 1914-В2001 // РЖ: Математика.— 2001.— N 8.— 8А146.

[58] Bashkirov E. L. Linear groups over a skew field of quaternions, containing $T_n(A, \Phi)$ over a subsfield // Arch. Math. (Basel).— 2002.— Vol. 79, N6.— P. 321—327.

[59] Bashkirov E. L. Irreducible linear groups of degree 3 over a quaternion division rings containing a root subgroup // Тезисы докладов Международной алгебраической конференции памяти З. И. Боревича, Санкт-Петербург, Россия, 17—23 сентября 2002.— Санкт-Петербург, 2002.— С. 82.

[60] Башкиров Е. Л. О подгруппах полной линейной группы над телом кватернионов, содержащих симплектическую группу // Сиб. мат. журнал.— 2003.— Т. 44, N 2.— С. 279—290.

[61] Bashkirov E. L. Some completely reducible linear groups over a quaternion division ring, containing a root subgroup // Comm. Algebra.— 2003.— Vol. 31, N 12.— P. 5727—5754.

[62] Bashkirov E. L. Irreducible linear groups of degree four over a quaternion division ring that contain a subgroup $\mathrm{diag}(T_3(K, \Phi_0), 1)$ // The 10^{th} International Conference "Groups and Group Rings". Ustroń, Poland, June 10—14, 2003.— Abstracts.— P. 24—26.

[63] Bashkirov E. L. Some completely reducible linear groups over a quaternion division ring, containing a root subgroup // AAA68: Workshop on General Algebra, Dresden, June 10–13, 2004.— Technical Report.— P. 14—15.

[64] Bashkirov E. L. Irreducible linear groups of degree 3 over a quaternion division ring, containing a root subgroup // Comm. Algebra.— 2004.— Vol. 32, N 5.— P. 1747—1763.

[65] Bashkirov E. L. Irreducible linear groups of degree four over a quaternion division algebra that contain a subgroup $\mathrm{diag}(T_3(K,\Phi_0),1)$ // J. Algebra.— 2005.— Vol. 287, N 2.— P. 319—350.